

32. ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ

ТРЕНИРОВЪЧЕН ВАРИАНТ, ЕСЕНЕН ТУР

10. - 12. клас

(Резултатът се формира от трите най-добре решени задачи.)

точки задачи

1. Банкомат обменя монети: дублони за пистולי и обратно. Един пистол се обменя за s дублона, а един дублон за $1/s$ от пистола (не е задължително s да е цяло число). В банкомата могат да се пуснат произволен брой монети от един вид, след което той връща монети от другия вид, като закръгля резултата до най-близкото цяло число (ако има две такива цели числа, се избира по-голямото).
 - а) Възможно ли е да обменим няколко дублона за пистולי, след това да обменим получените пистולי и да получим повече дублони, отколкото сме имали в началото?
 - б) Ако отговорът е положителен, възможно ли е още веднъж да увеличим получения брой дублони като повторим горната процедура?
2. Диагоналите на изпъкналия четириъгълник $ABCD$ са перпендикулярни и се пресичат в точка O . Сборът от радиусите на вписаните в $\triangle AOB$ и $\triangle COD$ окръжности е равен на сбора от радиусите на вписаните в $\triangle BOC$ и $\triangle DOA$ окръжности. Докажете, че:
 - а) в четириъгълника $ABCD$ може да се впише окръжност;
 - б) четириъгълникът $ABCD$ е симетричен относно един от диагоналите си.
3. Полицейски участък е разположен на права улица, безкрайна и в двете посоки. Престъпник откраднал стара полицейска кола, максималната скорост на която е 90% от максималната скорост на нова полицейска кола. След известно време кражбата била забелязана и един полицаи се отправил да догони крадеца, разбира се с нова кола. За съжаление полицаят не знаел нито кога, нито в каква посока е отпътувал крадецът. Може ли полицаят да хване крадеца?
4. Квадратна дъска $n \times n$ е разделена с $n - 1$ хоризонтални и $n - 1$ вертикални прави на n^2 правоъгълни полета. Полетата са шахматно оцветени. Известно е, че по един от диагоналите има n черни квадратни полета. Докажете, че сборът от лицата на черните полета е не по-малък от сбора от лицата на белите полета.
5. В турнир участвали 55 боксьори, като след всеки мач победеният напускал турнира. Мачовете се провеждали последователно. Известно е, че при всеки мач са се срещали боксьори, разликата между броя на победите на които (към момента) е не повече от 1. Колко най-много мача може да е изиграл победителят в турнира?