

32. ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ
ТРЕНИРОВЪЧЕН ВАРИАНТ, ЕСЕНЕН ТУР

Решения на задачите за 7. - 9. клас

Задача 1. (4 точки) В Питагоровата таблица за умножение е избрана правоъгълна рамка с дебелина едно квадратче. Всяка страна на рамката се състои от нечетен брой квадратчета. Квадратчетата от рамката са шахматно оцветени. Докажете, че сборът от числата в черните квадратчета е равен на сбора на числата в белите квадратчета.

(Питагорова таблица за умножение се нарича таблица, за която в квадратчето на m -тия ред и n -тия стълб е записано произведението mn за всяка двойка естествени числа m, n .)

Решение. Да оцветим шахматно цялата таблица. Забелязваме, че средното аритметично на числата, които са записани в две едноцветни квадратчета от един ред (или от един стълб) е равно на числото, записано в квадратчето, което се намира по средата между тях.

Тъй като всяка страна на рамката се състои от нечетен брой квадратчета, то върховете на рамката са в едноцветни квадратчета. Нека върховете на рамката са в черни квадратчета. Всяко число в бяло квадратче от рамката е равно на полусбора на числата в черните му съседни квадратчета от рамката. При това всяко число в черно квадратче от рамката се включва в точно два такива полусбора. Като съберем почленно тези равенства, ще получим, че сборът на числата в белите квадратчета е равен на сбора на числата в черните квадратчета.

Задача 2. (4 точки) Равнобедрен трапец е описан около окръжност. Докажете, че ъглополовящата на тъпия ъгъл на трапеца го разделя на две равнолищеви части.

Решение. Равнобедреният трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$) е описан около окръжност, следователно $\frac{1}{2}(AB + CD) = AD$. Нека тъпият ъгъл е при върха D , т.е. $AB > CD$, и нека ъглополовящата на ъгъл D пресича правата AB в точката E . Тогава $\angle ADE = \angle CDE = \angle DEA$, откъдето $AD = AE$. Следователно $AE = \frac{1}{2}(AB + CD) < AB$, което означава, че точката E е вътрешна за отсечката AB . Тъй като страната AE на $\triangle ADE$ е равна на средната отсечка на трапеца $ABCD$, а височините на този триъгълник и трапеца съвпадат, то лицето на $\triangle ADE$ е равно на половината от лицето на $ABCD$, което трябваше да докажем.

Задача 3. (4 точки) На шахматна дъска 8×8 е поставено кубче, долната стена на което съвпада с едно от полетата на дъската. Като се

преобръща около някое от ребрата си, кубчето обхожда всички полета на дъската (възможно повече от веднъж). Може ли при това движение някоя от стените на кубчето нито веднъж да не е стъпвала на дъската?

Решение. Такова движение е възможно. Да поставим кубчето на полето $A1$, като означим долната стена с X , а горната с Y . Като преобърнем кубчето по маршрута $A1 - A2 - B2 - B1$, то ще се премести с едно поле надясно, ще лежи на стената X и при това преобръщане стената Y няма да е стъпвала на дъската. По същия начин кубчето може да се премести с едно поле нагоре, следователно може да се обходи цялата дъска.

Задача 4. (4 точки) В едно училище повече от 90% от учениците знаят английски и немски език и повече от 90% от учениците знаят английски и френски. Докажете, че повече от 90% от учениците, които знаят немски и френски, знаят и английски език.

Решение. Нека a ученика знаят и трите езика, b – само английски и немски, c – само английски и френски, d – само немски и френски. По условие $a + b \geq 9(c + d)$ и $a + c \geq 9(b + d)$. Като съберем неравенствата и разделим на 2, получаваме, че $a \geq 9d + 4(b + c) \geq 9d$, което трябваше да докажем.

Задача 5. (4 точки) Краищата на N хорди разделят дадена окръжност на $2N$ дъги с дължина 1. Ако всяка хорда разделя окръжността на две дъги с четни дължини, докажете, че числото N е четно.

Решение. Да оцветим краищата на хордите така, че по окръжността да се редуват бели и черни точки. Така ще имаме N бели точки и N черни точки. Тъй като всяка хорда разделя окръжността на дъги с четни дължини, то краищата на всяка хорда са едноцветни. Следователно броят N на белите точки е четен, което трябваше да докажем.