Computing, Suppl. 1, 81—94 (1977)

Über Eigenschaften und Anwendungsmöglichkeiten der erweiterten Intervallrechnung und des hyperbolischen Fastkörpers über $\mathbb{R}$ *

E. Kaucher, Karlsruhe

Zusammenfassung

Der Raum der Intervallrechnung $I\mathbb{R}$ über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist der algebraischen Struktur nach eine additive, reguläre, kommutative, isotone Halbgruppe, die sich stets in eine Gruppe einbetten läßt [4], [5]. Diese Einbettung wird in Kapitel 3 explizit angegeben. Dazu wird eine weitere Multiplikation eingeführt, die zusammen mit der Intervalladdition einen Fastkörper bildet. Diese sogenannte hyperbolische Multiplikation weist weitgehende Verwandtschaft mit dem Produkt der komplexen Zahlen auf, wie in einem ersten Überblick gezeigt wird. Am Schluß werden einige Anwendungsmöglichkeiten dargestellt, die eine analytische Untersuchung von Problemen der Intervallrechnung unterstützen.

1. Ausgehend von den algebraischen Eigenschaften des Intervallraumes ($I\mathbb{R}$, $+, *, /, \subseteq$), wie er in [1], [6], [7], [8] aufgeführt ist, gilt:

($I\mathbb{R}$, $+$, $\subseteq$) ist eine isotone, kommutative, isoton reguläre Halbgruppe, das heißt es gilt 1. $A+B=B+A$, 2. $A\subseteq B\Leftrightarrow A+C\subseteq B+C$, 3. $(A+B)+C=A+(B+C)$.

Solche Halbgruppen lassen sich, wie in [4] und [5][1] aufgeführt, eindeutig einbetten in eine kleinste isotone Gruppe. Das Ergebnis dieser Einbettung kann isomorph repräsentiert werden durch die isotone Gruppe ($\mathbb{H}$, $+$, $\subseteq$) mit

$$\mathbb{H} := \{[a,b] \mid a,b \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}^2,$$

$$\bigwedge_{\substack{[a,b]\in\mathbb{H}\\ [c,d]\in\mathbb{H}}} [a,b]+[c,d] := [a+c, b+d] \tag{1 a}$$

$$[a,b] \subseteq [c,d] :\Leftrightarrow (c \leqq a \wedge b \leqq d). \tag{2}$$

Der isotone monadische Operator $-$ wird gemäß

$$\bigwedge_{[a,b]\in\mathbb{H}} -[a,b] := [-b, -a] \tag{1 b}$$

auf $\mathbb{H}$ als isotoner monadischer Operator kanonisch fortgesetzt. Mit

---

* Erweiterter Auszug aus dem III. Kapitel der von der Fakultät für Naturwissenschaften I der Universität Karlsruhe genehmigten Dissertation des Verfassers. (Referent: Prof. Dr. U. Kulisch; Korreferent: Prof. Dr. J. Herzberger.)

[1] In [5] werden allgemeine Einbettungssätze für isoton geordnete Divisionsringoide [6] mit assoziativer und regulärer Addition angegeben.

$$A, B \in \mathbb{H} \quad \text{und} \quad A - B := A + (-B) \tag{1 c}$$

ist die Subtraktion ebenfalls isoton und kanonisch fortgesetzt.

Definiert man die sogenannte Konjugation als weiteren monadischen (antitonen) Operator gemäß

$$\bigwedge_{[a,b] \in \mathbb{H}} \overline{[a, b]} := [b, a], \tag{3}$$

so gilt für die additiven Inversen in $\mathbb{H}$ die Darstellung:

$$A + (-\bar{A}) = 0 \tag{1 d}$$

$(\mathbb{I}\,\mathbb{R}, *, \subseteq)$ ist isotone, kommutative Halbgruppe, das heißt es gilt 4. $A * B = B * A$, 5. $A \subseteq B \Rightarrow A * C \subseteq B * C$, 6. $(A * B) * C = A * (B * C)$. Die Teilmenge $\mathscr{M} := \mathbb{I}\,\mathbb{R} \setminus \{[a, b]\} \mid a \cdot b \leqq 0\}$ ist mit $(\mathscr{M}, *, \subseteq)$ sogar eine isotone, isoton reguläre kommutative Halbgruppe, die sich wie die Addition in eine isotone Gruppe $(\mathscr{N}, *, \subseteq)$ einbetten läßt. Wir werden daher eine kanonische Fortsetzung der Multiplikation auf $(\mathbb{H}, \subseteq)$ fordern, so daß die isotone Gruppe $(\mathscr{N}, *, \subseteq)$ Untergruppe der Halbgruppe $(\mathbb{H}, *, \subseteq)$ ist. Dazu erweist es sich als vorteilhaft, die Multiplikation durch das sogenannte „hyperbolische Produkt" darzustellen.

2. In diesem Abschnitt bezeichnet $-A$ das inverse Element zu A.

Es heiße $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ mit der Addition gemäß (1) und dem sogenannten hyperbolischen Produkt

$$\bigwedge_{\substack{[a,b] \in \mathbb{H} \\ [c,d] \in \mathbb{H}}} [a, b] \cdot [c, d] := [a \cdot c, b \cdot d] \tag{4}$$

hyperbolischer Fastkörper.

Die Bezeichnung Fastkörper wird durch folgenden Satz gerechtfertigt:

Satz 1:

(a) $(\mathbb{H}, +)$ *ist Gruppe.*

(b) $(\mathbb{H}, \cdot)$ *ist kommutative Halbgruppe und* $(\mathbb{H} \setminus \mathscr{L}, \cdot)$ *ist Gruppe mit* $\mathscr{L} := \{[0, a] \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{[a, 0] \mid a \in \mathbb{R}\} = \{[a, b] \in H \mid a \cdot b = 0\}$.

(c) $+$ *und* $\cdot$ *sind distributiv.*

(d) $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ *ist ein Ring mit Nullteiler in* $\mathscr{L}$.

Beweis:

(a) Folgt aus (1).

(b) Die Assoziativität und Kommutativität folgt unmittelbar aus den entsprechenden Eigenschaften in $(\mathbb{R}, \cdot)$ in den Komponenten. Ferner ist $[a, b] \cdot [1/a, 1/b] = [1, 1]$ genau dann, wenn $a \cdot b \neq 0$, das heißt $[a, b] \notin \mathscr{L}$. Ferner ist $[a, b] \cdot [1, 1] = [a, b]$.

(c) Es ist $([a, b] + [c, d]) \cdot [x, y] = [(a + c) \cdot x, (b + d) \cdot y] = [a\,x + c\,x, b\,y + d\,y] = [a, b] \cdot [x, y] + [c, d] \cdot [x, y]$.

(d) Ergibt sich aus (a), (b), (c) und $[a, 0] \cdot [0, b] = 0$. □

Die Bezeichnung hyperbolisch begründet sich in den folgenden Eigenschaften.

Die Abbildungen $\mu, \delta : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ mit

$$\bigwedge_{\substack{[a,b] \in \mathbb{H} \\ \langle c,d \rangle \in \mathbb{H}}} \left\{ \begin{array}{ll} \mu\,[a, b] := \dfrac{a+b}{2}, & \delta\,[a, b] := \dfrac{b-a}{2} \\ \mu\,\langle c, d \rangle := c, & \delta\,\langle c, d \rangle := d \end{array} \right\} \tag{5 a}$$

führt zur sogenannten Mittelpunkts-Radiusdarstellung des Raumes $\mathbb{H}$. Es ist dann $[a, b] = \left\langle \dfrac{a+b}{2}, \dfrac{b-a}{2} \right\rangle$.

Die Abbildungen $\lambda, \rho : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ mit

$$\bigwedge_{\substack{[a,b] \in \mathbb{H} \\ \langle c,d \rangle \in \mathbb{H}}} \left\{ \begin{array}{ll} \lambda\,[a, b] := a, & \rho\,[a, b] = b \\ \lambda \langle c, d \rangle := c - d, & \rho \langle c, d \rangle := c + d \end{array} \right\} \tag{5 b}$$

zu gewohnter Grenzendarstellung $\langle c, d \rangle = [c - d, c + d]$.

Die (regulären) Intervalle $A \in \mathbb{I}\,\mathbb{R}$ sind dann charakterisiert durch $\delta\,(A) \geqq 0$. Ferner identifizieren wir künftig die Punktintervalle $[a, a] = \langle a, 0 \rangle$ mit den reellen Zahlen $a \in \mathbb{R}$ selbst.

Es werden nun einige charakteristische Eigenschaften des Raumes $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ und einige Funktionen über diesem Raum angeführt. Dazu werden folgende Darstellungen der arithmetischen Operationen in der $\mu - \delta$-Darstellung verwendet. Aus (1 a) und (4) folgt

$$A + B = \langle \mu\,(A) + \mu\,(B),\ \delta\,(A) + \delta\,(B) \rangle$$
$$A \cdot B = \langle \mu\,(A)\,\mu\,(B) + \delta\,(A)\,\delta\,B,\ \mu\,(A)\,\delta\,(B) + \delta\,(A)\,\mu\,(B) \rangle$$

und speziell

$$A \cdot \bar{A} = \mu\,(A)^2 - \delta\,(A)^2.$$

2.1 Betrachtet man das Funktional $\sigma : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^+ \cup i\,\mathbb{R}^+$ $(i = \sqrt{-1})$ mit

$$\bigwedge_{A \in \mathbb{H}} \sigma\,(A) := \sqrt{A \cdot \bar{A}} = \sqrt{\mu\,(A)^2 - \delta\,(A)^2} = \sqrt{\lambda\,(A) \cdot \rho\,(A)}, \tag{6}$$

so stellt σ eine Art Norm dar, und zwar entspricht σ^2 der quadratischen Form einer Bilinearform vom Index 1 des pseudoeuklidischen Raumes. Obwohl σ nur die Eigenschaften

$$(N\,1) \quad \sigma\,(A) = 0 \Leftrightarrow A \in \mathscr{L}$$
$$(N\,2) \quad \sigma\,(A \cdot B) = \sigma\,(A) \cdot \sigma\,(B)$$

aufweist und nicht einmal einer Dreiecksungleichung genügt, sei σ als Pseudonorm bezeichnet. Dasselbe gilt auch für $|\sigma|\,(A) := |\sigma\,(A)|$.

Entsprechend den Sektoreinteilungen des pseudoeuklidischen Raumes vom Index 1 in $\mathbb{R}^2$ sei $\mathbb{H}$ in die entsprechenden Sektoren $\mathbb{H} := \mathscr{S} \cup \mathscr{T}$ mit $\mathscr{S} := \mathscr{S}_r \cup \mathscr{S}_l$ und $\mathscr{T} := \mathscr{T}_f \cup \mathscr{T}_p$ eingeteilt:

$$\mathscr{S}_r := \{A \mid \lambda\,(A) \geqq 0,\ \rho\,(A) \geqq 0\}, \quad \mathscr{S}_l := \{A \mid \lambda\,(A) \leqq 0,\ \rho\,(A) \leqq 0\},$$
$$\mathscr{T}_f := \{A \mid \lambda\,(A) \leqq 0 \leqq \rho\,(A)\}, \quad \mathscr{T}_p := \{A \mid \rho\,(A) \leqq 0 \leqq \lambda\,(A)\}.$$

Es ist dann $\sigma\,(A) \in \mathbb{R}^+$ für $A \in S$ und $\sigma\,(A) \in i\,\mathbb{R}^+$ für $A \in \mathscr{T}$.

2.2 Betrachten wir jetzt einige grundlegende Funktionen, so gilt z. B.

$$A^2=A\cdot A=[\lambda(A)^2,\ \rho(A)^2]=\langle\mu(A)^2+\delta(A)^2,\ 2\,\mu(A)\,\delta(A)\rangle,$$

was eine gewisse formale Ähnlichkeit zur Multiplikation in $\mathbb{C}$ aufweist. Die Zahl 1 hat in $\mathbb{H}$ demnach vier Wurzeln, das heißt $A^2-1=0$ für $A=1,\ -1,\ \langle 0,1\rangle$ und $\langle 1,0\rangle$.

Um die Analogie zu den Formeln in der Gaußschen Ebene $\mathbb{C}$ stärker herauszustellen, sei kurz die Exponentialfunktion

$$e^{[a,b]}:=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{[a,b]^\nu}{\nu!} \tag{7}$$

untersucht, wobei $[a,b]^n:=[a,b]^{n-1}\cdot[a,b]$ und $[a,b]^0:=1$ ist. Damit folgt $[a,b]^n:=[a^n,b^n]$ und

$$e^{[a,b]}=[e^a,e^b]. \tag{8}$$

In der $\mu-\delta$-Darstellung gilt

$$\begin{aligned} e^A&=e^{\langle\mu(A),\delta(A)\rangle}=e^{[\mu(A)-\delta(A),\,\mu(A)+\delta(A)]}\\ &=e^{\mu(A)}\cdot[e^{-\delta(A)},e^{\delta(A)}],\ \text{das heißt}\\ e^A&=e^{\mu(A)}\cdot\langle\cosh\delta(A),\ \sinh\delta(A)\rangle. \end{aligned} \tag{9}$$

Was in $\mathbb{C}$ die trigonometrischen Funktionen darstellen, leisten hier die hyperbolischen. Es bietet sich daher die Analogie an, ebenfalls eine Polarkoordinatendarstellung eines Intervalles A anzugeben. Sei $\mathrm{rad}:\mathbb{H}\to\mathscr{E}\cdot\mathbb{R}^+$ mit $\mathscr{E}=\{1,-1,\langle 0,1\rangle,\langle 0,-1\rangle\}$ und

$$\bigwedge_{A\in\mathbb{H}}\mathrm{rad}(A):=\begin{cases}|\sigma(A)| & \text{für } A\in\mathscr{S}_r\\ \langle 0,1\rangle\,|\sigma(A)| & \text{für } A\in\mathscr{T}_f\\ -|\sigma(A)| & \text{für } A\in\mathscr{S}_l\\ \langle 0,-1\rangle\,|\sigma(A)| & \text{für } A\in\mathscr{T}_p\end{cases} \tag{10}$$

definiert, so gilt die Polarkoordinatendarstellung:

$$\bigwedge_{A\in\mathbb{H}} A=\mathrm{rad}(A)\cdot e^{\langle 0,\arg(A)\rangle}=r\,e^{\langle 0,\phi\rangle} \tag{11}$$

mit $\phi=\arg(A):=\operatorname{artanh}\dfrac{\delta(A)}{\mu(A)}$ und $r:=\mathrm{rad}(A)$. Diese Darstellung (11) verrät den grundlegenden hyperbolischen Charakter des Raumes $\mathbb{H}$. Das Produkt stellt daher mit

$$\begin{aligned} A\cdot B&=\mathrm{rad}(A)\cdot\mathrm{rad}(B)\cdot e^{\langle 0,\arg(A)\rangle}\cdot e^{\langle 0,\arg(B)\rangle}\\ &=\mathrm{rad}(A)\cdot\mathrm{rad}(B)\cdot e^{\langle 0,\arg(A)+\arg(B)\rangle} \end{aligned} \tag{12}$$

eine hyperbolische Drehung dar. Die Inversion $A\to A^{-1}$ mit $A\cdot A^{-1}=1$ beschreibt mit

$$A^{-1}=\frac{\bar A}{\sigma(A)^2}=\frac{\bar A}{\mu(A)^2-\delta(A)^2}=\frac{\mathrm{rad}(A)}{\sigma(A)^2}\,e^{\langle 0,-\arg(A)\rangle} \tag{13}$$

eine konjugierte Spiegelung von A an den Einheitshyperbeln $\{X\mid|\sigma(X)|=1\}$. Abschnitt 2.4 erläutert den Begriff der Spiegelung.

2.3 Die linear gebrochene Funktion $F(X)=(A\cdot X+B)\cdot(C\cdot X+D)^{-1}$ stellt einen Automorphismus $\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ dar, wenn A,B,C und D geeigneten Bedingungen unterliegen. Aufgrund der weitgehenden Analogie zur Möbiustransformation in $\mathbb{C}$ seien sie hyperbolische Möbiustransformationen genannt.

Satz 2: *Eine linear gebrochene Funktion $F(X)=(A\cdot X+B)\cdot(C\cdot X+D)^{-1}$ mit $A,C\notin\mathscr{L}$ und $A\cdot D-B\cdot C\notin\mathscr{L}$ ist ein Automorphismus, der eine Hyperbelverwandtschaft auf $\mathbb{H}$ charakterisiert. Normalhyperbeln (achsenparallele und rechtwinkelige) oder Geraden werden wieder auf Normalhyperbeln oder Geraden abgebildet.*

Beweis: Die Gleichung einer Normalhyperbel lautet mit $r\in\mathbb{R}^+$:

$$r^2=|\sigma(X-A)|^2=|(X-A)\cdot(\bar X-\bar A)|=|X\cdot\bar X-A\cdot\bar X-\bar A\cdot X+A\cdot\bar A|. \tag{14}$$

Dies ist äquivalent mit

$$a(X+\bar X)+\langle 0,b\rangle\cdot(\bar X-X)+c(X\cdot\bar X-1)+d(X\cdot\bar X+1)=0 \tag{15}$$

für $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ und den Bedingungen:

$$A=-\frac{\langle a,b\rangle}{c+d},\quad r^2=\frac{|a^2-b^2+c^2-d^2|}{(c+d)^2},\quad c+d\neq 0.$$

Im Falle $c+d=0$ stellt (15) die Gleichung einer Geraden dar, die wegen $2\mu(X)=X+\bar X$ und $2\delta(X)=\bar X-X$ die Gestalt

$$a\,\mu(X)+b\,\delta(X)-c=0 \tag{16}$$

annimmt.

Durch Hintereinanderanwendung der Abbildungen

$$W_1:=A\cdot X,\quad W_2:=A+X \tag{17}$$

und

$$W:=X^{-1} \tag{18}$$

erhält man stets die lineare gebrochene Funktion. Es genügt daher, die Hyperbelverwandtschaft anhand von (17) und (18) nachzuweisen.

Die Gleichung (16) ist offenbar invariant bezüglich (17). Ebenso ist (14) invariant bezüglich (17). Der schwierigere Fall (18) jedoch liefert in (15) bei Ersetzung $X:=W^{-1}$ und Erweiterung der Gleichung mit $W\cdot\bar W\in\mathbb{R}$:

$$a(W+\bar W)-\langle 0,b\rangle\cdot(\bar W-W)-c(W\cdot\bar W-1)+d(W\cdot\bar W+1)=0,$$

was gerade wieder (15) ist. Es werden daher bei der Transformation (18) Geraden auf Hyperbeln abgebildet, in denen ein Ast durch 0 geht.

Wie leicht nachzuweisen ist, gilt das Doppelverhältnis □

$$\begin{aligned} &(W_1-W_2)\cdot(W_2-W_4)\cdot(W_1-W_3)^{-1}\cdot(W_2-W_4)^{-1}=\\ &=(X_1-X_2)\cdot(X_3-X_4)\cdot(X_1-X_3)^{-1}\cdot(X_2-X_3)^{-1}, \end{aligned} \tag{19}$$

so daß die hyperbolischen Möbiustransformationen charakterisiert werden können als doppelverhältnisinvariante Abbildung.

Die Isotonie muß in folgenden 6 Fällen überprüft werden. Es wird stets $A \subseteq B$ angenommen und $A * C \subseteq B * C$ nachgewiesen. Ist

(a.6) $A, B, C \in \mathcal{S}_r$, so ist wegen $\lambda(B) \leqq \lambda(A)$, $\rho(A) \leqq \rho(B)$ und $0 \leqq \lambda(C) \leqq \rho(C)$ stets $\lambda(B)\,\lambda(C) \leqq \lambda(A)\,\lambda(C)$ und $\rho(A)\,\rho(C) \leqq \rho(B)\,\rho(C)$ woraus für $A * C = A \cdot C$ und $B * C = B \cdot C$ stets $A * C \subseteq B * C$ folgt.

(a.7) $A, B \in \mathcal{S}_r$, $C \in \mathcal{T}_f$, dann ist $A * C = \rho(A) \cdot C$ und $B * C = \rho(B) \cdot C$, woraus mit $0 \leqq \rho(A) \leqq \rho(B)$ folgt $\rho(A) \cdot C \subseteq \rho(B) \cdot C$, das heißt $A * C \subseteq B * C$.

(a.8) $A, B \in \mathcal{T}_f$, $C \in \mathcal{S}_r$, so ist $A * C = A * \rho(C)$ und $B * C = B * \rho(C)$, das heißt mit $\mathcal{T}_f \in \mathbb{IR}$ und $\rho(C) \in \mathbb{R}^+$ ist die Isotonie mit der in $(\mathbb{IR}, *, \subseteq)$ (nach 5.) bewiesen.

(a.9) $A, B, C \in \mathcal{T}_f \subseteq \mathbb{IR}$, so gilt die Isotonie nach 5. in $(\mathbb{IR}, *, \subseteq)$.

(a.10) $A, B \in \mathcal{T}_f$, $C \in \mathcal{T}_p$, so ist $A * C = B * C = 0$.

(a.11) $A \in \mathcal{S}_r$, $B \in \mathcal{T}_f$ und $C \in \mathcal{S}_r \cup \mathcal{T}_f$, so existiert stets ein $X \in \mathcal{S}_r \cap \mathcal{T}_f \subset \mathcal{L}$ mit $A \subseteq X \subseteq B$, so daß nach den Fällen (a.6), (a.7), (a.8) und (a.9) folgt $A * C \subseteq X * C$ und $X * C \subseteq B * C$, das heißt $A * C \subseteq B * C$.

(b) Der Nachweis der Gruppeneigenschaften reduziert sich auf $1 \in \mathcal{S}$, $A * 1 = 1$, $A * [1/\lambda(A), 1/\rho(A)] = 1$ und $[1/\lambda(A), 1/\rho(A)] \in \mathcal{S}$, was für $A \in \mathbb{H} \backslash \mathcal{T}$ ebenfalls stets erfüllt ist.

(c) Ist $A \subseteq B$, so ist $\lambda(B) \leqq \lambda(A)$ und $\rho(A) \leqq \rho(B)$ und daher folgt $1/\lambda(A) \leqq 1/\lambda(B)$ und $1/\rho(B) \leqq 1/\rho(A)$, weshalb $1/A \subseteq 1/B$ gilt. Aufgrund der in (a) bewiesenen Isotonie von $*$ ist auch die Division isoton.

Ein großer Teil der hier hergeleiteten und bewiesenen Eigenschaften sind in allgemeiner Form für eine umfassende Klasse von verwandten Räumen abgeleitet worden [4], [5]. Es sei vermerkt, daß in $(\mathbb{H}, +, *, \subseteq)$ kein allgemeines Subdistributivgesetz gilt.

4. Zusammenfassend gelten für den Raum $(\mathbb{H}, +, *, /, \cdot, \subseteq)$ mit

(H 0)
$$\begin{aligned} &A + B := [\lambda(A) + \lambda(B), \rho(A) + \rho(B)],\\ &A - B := A + (-B) \text{ mit } -B := [-\rho(B), -\lambda(B)],\\ &A * B := \text{Tab. 1},\\ &A \,/\, B := A * 1/B \text{ für } B \in \mathcal{S}/\mathcal{L} \text{ und } 1/B := [1/\rho(B), 1/\lambda(B)],\\ &A \cdot B := [\lambda(A)\,\lambda(B), \rho(A)\,\rho(B)],\\ &A \subseteq B :\Leftrightarrow \lambda(B) \leqq \lambda(A) \wedge \rho(A) \leqq \rho(B),\\ &\bar{A} := [\rho(A), \lambda(A)] \end{aligned}$$

folgende Eigenschaften:

(H 1) $A + B = B + A$

(H 2) $(A + B) + C = A + (B + C)$

(H 3) $0 + A = A$

(H 4) $A + (-\bar{A}) = 0$

(H 5) $A \subseteq B \Leftrightarrow A + C \subseteq B + C$

(H 6) $\overline{A + B} = \bar{A} + \bar{B}$

(H 7) $A * B = B * A$

(H 8) $(A * B) * C = A * (B * C)$

(H 9) $1 * A = A$

(H 10) $A * 1/\bar{A} = 1 \Leftrightarrow A \in \mathcal{S} \backslash \mathcal{L}$

(H 11) $A \subseteq B \Rightarrow A * C \subseteq B * C$

(H 12) $\overline{A * B} = \bar{A} * \bar{B}$

(H 13) $A * B \in \mathcal{T}_f \Leftrightarrow A \in \mathcal{T}_f \vee B \in \mathcal{T}_f$
$A * B \in \mathcal{T}_p \Leftrightarrow A \in \mathcal{T}_p \vee B \in \mathcal{T}_p$

(H 14) $A \cdot B = B \cdot A$

(H 15) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

(H 16) $1 \cdot A = A$

(H 17) $A \cdot A^{-1} = 1$ und $A^{-1} = 1/\bar{A}$ für $A \notin \mathcal{L}$

(H 18) $\overline{A \cdot B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$

(H 19) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

(H 20) $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = a \cdot \bar{B} \in \mathcal{L}$, $a \in \mathbb{R}$.

5. Die Anwendungsmöglichkeiten des Raumes $(\mathbb{H}, +, *, /, \cdot, \subseteq)$ und insbesondere des hyperbolischen Fastkörpers $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ im Zusammenhang mit der Darstellung in Tab. 1 zeigt folgendes Beispiel. In [2] bzw. [11] wurden Gleichungen der Art $A * X = B$ bzw. $A * X + B = C * X + D$ auf ihre Lösungen X untersucht. In eleganter Weise kann jedoch in dem hier eingeführten algebraischen erweiterten Raum die Lösung bzw. Lösungsmenge der wesentlich allgemeineren Gleichung

$$L(X) = \sum_{i=1}^{N} A_i * X = B \tag{25}$$

charakterisiert und angegeben werden. Im Hinblick auf die im Vergleich doch recht unüberschaubare und zum Teil sogar unvollständige Untersuchung von Berti in [2] wird es sich im folgenden zeigen, welche Vorteile bei analytischen Untersuchungen zukünftig von den hier angegebenen Räumen zu erwarten sind.

Aufgrund der Sektoreneinteilung von $\mathbb{H}$ bezüglich Tab. 1 betrachten wir eine Permutation π der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, N$ derart, daß gilt:

$$\begin{aligned} &\bigwedge_{1 \leqq i \leqq N_1} A_{\pi i} \in \mathcal{S}_r, \qquad \bigwedge_{N_1' \leqq i \leqq N_2} A_{\pi i} \in \mathcal{T}_f\\ &\bigwedge_{N_2' \leqq i \leqq N_3} A_{\pi i} \in \mathcal{S}_l, \qquad \bigwedge_{N_3' \leqq i \leqq N} A_{\pi i} \in \mathcal{T}_p \end{aligned} \tag{26}$$

Dabei gilt $N_k' := N_k + 1$ für $k = 1, 2, 3$. Nach dieser Umordnung von (25) zerfällt die Summe in vier Teilsummen, in denen jeweils je nach der Fallunterscheidung

$X \in \mathcal{S}_r$, $X \in \mathcal{T}_f$, $X \in \mathcal{S}_l$ und $X \in \mathcal{T}_p$ das Produkt $*$ durch das hyperbolische Produkt gemäß Tab. 1 ersetzt werden kann. Wegen der Distributivität des hyperbolischen Produktes kann im jeweiligen Falle eine der folgenden wesentlich vereinfachten Gleichungen hergeleitet werden (zur Bestimmung der F_i siehe Formeln (38)—(41)):

$$L(X) = F_1 \cdot X + F_2 \cdot \rho(X) + F_3 \cdot \bar{X} + F_4 \cdot \lambda(X) = B \tag{27 a}$$

$$L(X) = F_1 \cdot X + F_3 \cdot \bar{X} + \left[\sum_{i=N_1'}^{N_2} (\lambda(A_{\pi i})\,\rho(X)\,\rho(A_{\pi i})\,\lambda(X)), \; \sum_{i=N_1'}^{N_2} (\lambda(A_{\pi i})\,\lambda(X)\,\rho(A_{\pi i})\,\rho(X)) \right] \tag{27 b}$$

$$L(X) = F_1 \cdot X + F_3 \cdot \bar{X} + \left[\sum_{i=N_3'}^{N} (\lambda(A_{\pi i})\,\lambda(X)\,\rho(A_{\pi i})\,\rho(X)), \; \sum_{i=N_3'}^{N} (\lambda(A_{\pi i})\,\rho(X)\,\rho(A_{\pi i})\,\lambda(X)) \right], \tag{27 c}$$

welche in $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ leicht zu lösen sind. Zunächst seien die Lösungen bzw. Lösungsmengen von (27) angegeben, bevor der Zusammenhang mit den gesuchten Lösungen von (25) hergestellt wird.

In Komponenten geschrieben lautet (27 a):

$$\begin{aligned} \lambda(F_1 + F_4) \cdot \lambda(X) + \lambda(F_2 + F_3)\,\rho(X) &= \lambda(B) \\ \rho(F_3 + F_4) \cdot \lambda(X) + \rho(F_1 + F_2)\,\rho(X) &= \rho(B). \end{aligned} \tag{28}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem $\mathcal{A}\mathcal{X} = \mathcal{B}$ für $\lambda(X)$ und $\rho(X)$, das folgende drei Lösungsfälle besitzt:

Ist $\Delta := \lambda(F_1 + F_4)\,\rho(F_1 + F_2) - \rho(F_3 + F_4)\,\lambda(F_2 + F_3)$,

(a) so existiert im Falle $\Delta \neq 0$ genau eine Lösung $\mathcal{X}$, so daß gilt:

$$X = \frac{1}{\Delta} [\lambda(B)\,\rho(F_1 + F_2) - \rho(B)\,\lambda(F_2 + F_3),\; \rho(B)\,\lambda(F_1 + F_2) - \lambda(B)\,\rho(F_3 + F_4)]. \tag{29}$$

(b) gilt jedoch $\Delta = 0$, so ist (28) genau dann lösbar, wenn gilt: $A \neq 0$, $\lambda(B)\,\rho(F_1 + F_2) = \rho(B)\,\lambda(F_2 + F_3)$ und $\lambda(B)\,\rho(F_3 + F_4) = \rho(B)\,\lambda(F_1 + F_4)$. Die Lösungsmenge $\mathcal{Y}$ hat dann die Gestalt:

$$\mathcal{Y} := \{X \mid X = X^* + a \cdot X_0,\ a \in \mathbb{R},\ X^* \text{ spezielle und } X_0 \text{ eine homogene Lösung von (28)}\}. \tag{30}$$

Ist $A \equiv 0$, so ist entweder $\lambda(B) = \rho(B) = 0$ und $\mathcal{Y} = \mathbb{H}$, oder aber (28) ist unlösbar.

(c) Sind speziell $F_2 = F_4 = 0$, so läßt sich eine Lösung direkt berechnen. Es ist dann

$$F_1 \cdot X + F_3 \cdot \bar{X} = B$$

und

$$\bar{F}_3 \cdot X + \bar{F}_1 \cdot \bar{X} = \bar{B},$$

wobei die zweite Gleichung durch Konjugation aus der ersten hervorgeht. Es liegt jetzt ein System von zwei Gleichungen in $\mathbb{H}^2$ vor, das mit

$$\Delta := F_1 \cdot \bar{F}_1 -_h F_3 \cdot F_3 \neq 0$$

die eindeutig bestimmte Lösung

$$X = \Delta^{-1} \cdot (B \cdot \bar{F}_1 -_h \bar{B} \cdot F_3)$$

besitzt.

Zur Lösung der Gleichung (27 b) setzen wir mit $\mathcal{I} := \{N_1', \ldots, N_2\}$, $\alpha_i := \lambda(A_{\pi i})$, $\beta_i := \rho(A_{\pi i})$, $\alpha := (\alpha_i)_{i \in \mathcal{I}}$, $\beta := (\beta_i)_{i \in \mathcal{I}}$ und erhalten die (27 b) in Komponenten:

$$\begin{aligned} \lambda(F_1)\,\lambda(X) + \lambda(F_3)\,\rho(X) + \sum_{i \in \mathcal{I}} (\alpha_i\,\lambda(X) \sqcap \beta_i\,\rho(X)) &= \lambda(B) \\ \rho(F_1)\,\rho(X) + \rho(F_3)\,\lambda(X) + \sum_{i \in \mathcal{I}} (\alpha_i\,\lambda(X) \sqcup \beta_i\,\rho(X)) &= \rho(B). \end{aligned} \tag{31}$$

Im Verband $(\mathbb{R}, +, \sqcap, \sqcup)$ gilt die Formel

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} (\xi_i \sqcap \eta_i) = \bigsqcap_{\mathcal{J} \in \mathbb{P}(\mathcal{I})} \sum_{\substack{j \in \mathcal{J} \\ k \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{J}}} (\xi_j + \eta_k), \tag{32}$$

so daß mit der Abkürzung

$$\phi_{\mathcal{J}}(\xi, \eta) := \sum_{\substack{j \in \mathcal{J} \\ k \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{J}}} (\xi_j + \eta_k) \tag{33}$$

(31) sich ergibt zu:

$$\begin{aligned} \lambda(F_1)\,\lambda(X) + \lambda(F_3)\,\rho(X) + \bigsqcap_{\mathcal{J} \in \mathbb{P}(\mathcal{I})} \phi_{\mathcal{J}}(\alpha\,\rho(X), \beta\,\lambda(X)) &= \lambda(B) \\ \rho(F_1)\,\rho(X) + \rho(F_3)\,\lambda(X) + \bigsqcup_{\mathcal{J} \in \mathbb{P}(\mathcal{I})} \phi_{\mathcal{J}}(a\,\lambda(X), \beta\,\lambda(X)) &= \rho(B) \end{aligned} \tag{34}$$

Wegen der Linearität von $\phi_{\mathcal{J}}$ in beiden Argumenten und der Distributivität von $\sqcap$ und $\sqcup$ mit $+$ folgt schließlich:

$$\begin{aligned} \bigsqcap_{\mathcal{J} \in \mathbb{P}(\mathcal{I})} \{(\lambda(F_1) + \phi_{\mathcal{J}}(0, \beta))\,\lambda(X) + (\lambda(F_3) + \phi_{\mathcal{J}}(\alpha, 0))\,\rho(X)\} &= \lambda(B) \\ \bigsqcup_{\mathcal{J} \in \mathbb{P}(\mathcal{I})} \{(\rho(F_3) + \phi_{\mathcal{J}}(\alpha, 0))\,\lambda(X) + (\rho(F_1) + \phi_{\mathcal{J}}(0, \beta))\,\rho(X)\} &= \rho(B). \end{aligned} \tag{35}$$

Die Aussage von (35) ist äquivalent mit:

$$\begin{aligned} \bigwedge_{\mathcal{J} \in \mathbb{P}(\mathcal{I})} \{(\lambda(F_1) + \phi_{\mathcal{J}}(0, \beta))\,\lambda(X) + (\lambda(F_3) + \phi_{\mathcal{J}}(\alpha, 0))\,\rho(X)\} &\geqq \lambda(B) \\ \bigwedge_{\mathcal{J} \in \mathbb{P}(\mathcal{I})} \{(\rho(F_3) + \phi_{\mathcal{J}}(\alpha, 0))\,\lambda(X) + (\rho(F_1) + \phi_{\mathcal{J}}(0, \beta))\,\rho(X)\} &\leqq \rho(B) \end{aligned} \tag{36}$$

Entsprechend gilt für (27 c) mit $\mathcal{I} := \{N_3', \ldots, N\}$:

$$\begin{aligned} \bigwedge_{\mathcal{J} \in \mathbb{P}(\mathcal{I})} \{(\lambda(F_1) + \phi_{\mathcal{J}}(\alpha, 0))\,\lambda(X) + (\lambda(F_3) + \phi_{\mathcal{J}}(0, \beta))\,\rho(X)\} &\leqq \lambda(B) \\ \bigwedge_{\mathcal{J} \in \mathbb{P}(\mathcal{I})} \{(\rho(F_3) + \phi_{\mathcal{J}}(0, \beta))\,\lambda(X) + (\rho(F_1) + \phi_{\mathcal{J}}(\alpha, 0))\,\rho(X)\} &\geqq \rho(B). \end{aligned} \tag{37}$$

(36) und (37) stellen aber gerade jeweils eine Polygonfläche in $\mathbb{R}^2$ dar, bestimmt durch höchstens $2 \cdot |\mathbb{P}(\mathcal{I})|$ Geraden, das sind $2 \cdot 2^{N_2 - N_1}$ im ersten und $2 \cdot 2^{N - N_3}$ Geraden im zweiten Fall.

Der Zusammenhang zwischen den Lösungen von (25) und denen von (27) wird durch folgende Fallunterscheidung hergestellt. $\mathscr{X}$ kennzeichne die Lösungsmenge von (25) und $\mathscr{Y}$ die von (27), berechnet nach (29), (30), (36) und (37).

(a) Für $X \in \mathscr{X} \cap \mathscr{S}_r$ gilt $\mathscr{X} \cap \mathscr{S}_r = \mathscr{Y} \cap \mathscr{S}_r$, wobei $\mathscr{Y}$ berechnet wird aus (27 a) mit

$$\begin{aligned} F_1 &:= \sum_{i=1}^{N_1} A_{\pi i}, \quad F_2 := \sum_{i=N_1'}^{N_2} A_{\pi i}, \\ F_3 &:= \sum_{i=N_2'}^{N_3} A_{\pi i}, \quad F_4 := \sum_{i=N_3'}^{N} A_{\pi i}. \end{aligned} \tag{38}$$

(b) Für $X \in \mathscr{X} \cap \mathscr{S}_l$ gilt entsprechend $\mathscr{X} \cap \mathscr{S}_l = \mathscr{Y} \cap \mathscr{S}_l$, wobei $\mathscr{Y}$ berechnet wird aus (27 a) mit

$$F_1 := \sum_{i=1}^{N_1} \overline{A_{\pi i}}, \quad F_2 := \sum_{i=N_1'}^{N_2} \overline{A_{\pi i}}, \quad F_3 := \sum_{i=N_2'}^{N_3} \overline{A_{\pi i}}, \quad F_4 := \sum_{N_3'}^{N} \overline{A_{\pi i}}. \tag{39}$$

(c) Für $X \in \mathscr{X} \cap \mathscr{T}_f$ gilt $\mathscr{X} \cap \mathscr{T}_f = \mathscr{Y} \cap \mathscr{T}_f$, wobei $\mathscr{Y}$ berechnet wird im Falle $N_1 = N_2$ aus (27 a) mit

$$F_1 := \sum_{i=1}^{N_2} \rho(A_{\pi i}), \quad F_2 := 0, \quad F_3 := \sum_{i=N_2'}^{N_3} \lambda(A_{\pi i}), \quad F_4 := 0 \ \text{[2]} \tag{40}$$

und im allgemeinen Falle aus (27 b) gemäß (36) mit demselben F_1 und F_3 von (40).

(d) Für $X \in \mathscr{X} \cap \mathscr{T}_p$ gilt $\mathscr{X} \cap \mathscr{T}_p = \mathscr{Y} \cap \mathscr{T}_p$ und $\mathscr{Y}$ ist zu berechnen im Falle $N_3 = N$ aus (27a) mit

$$F_1 := \sum_{i=1}^{N_1} \lambda(A_{\pi i}), \quad F_2 := 0^{(1)}, \quad F_3 := \sum_{i=N_2'}^{N} \rho(A_{\pi i}), \quad F_4 := 0 \tag{41}$$

und im allgemeinen Falle aus (27 c) gemäß (37) mit demselben F_1 und F_3 von (41).

Die Richtigkeit der Angaben (a) bis (d) bestätigt sich aus der Konstruktion der Ersatzprobleme (27) und den Eigenschaften der Multiplikation nach Tab. 1.

Ein einfaches Kriterium, wann ein $X \notin \mathscr{T}$ und damit die schwierigeren Fälle von (27 b) nicht auftreten, ist das hinreichende Kriterium $B \notin \mathscr{T}$.

Wie zu sehen ist, sind offenbar alle Formeln mit gewissen Einschränkungen sofort übertragbar auf konvergente Reihen

$$L(X) := \sum_{i=1}^{\infty} (A_i * X) = B \tag{42}$$

und auf Integralgleichungen der Gestalt

$$L(x) := \int_a^b (A(\tau) * X)\, d\tau = B. \tag{43}$$

[2] Folgerung aus $* : \mathscr{T}_f \times \mathscr{T}_p \to 0$.

Unter der Voraussetzung, daß entweder eine Lösung $X \in \mathscr{T}$ nicht zulässig ist, z. B. sicher dann, wenn $B \notin \mathscr{T}$ oder aber, daß $A_i \notin \mathscr{T}$ bzw. $A(\tau) \notin \mathscr{T}$ gilt, sind sofort die Lösungsmethoden von (27 a) anwendbar. Im anderen Falle müssen geeignete Zusatzforderungen die Konvergenz von (36) und (37) sichern, was hier nicht näher untersucht werden soll.

Das angegebene Verfahren kann auf Vektorgleichungen in $\mathbb{H}^n$ der Form

$$L(X) := \mathscr{A} * X + \mathscr{B} * \bar{X} = B, \tag{44}$$

verallgemeinert werden. $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ sind $n \times n$-Matrizen in $\mathbb{H}^{n \cdot n}$, X und B Vektoren in $\mathbb{H}^n$. Im folgenden Abschnitt 6 wird gezeigt, in welchem Zusammenhang Formeln der Bauart (44) zu erwarten sind.

6. Seien $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ Matrizen in $(\mathbb{I}\,\mathbb{R})^{n \cdot n}$, $\mathscr{H}$, $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ Matrizen in $\mathbb{P}^{n \cdot n}$, C, X Vektoren in $(\mathbb{I}\,\mathbb{P})^n$ und $x, c \in \mathbb{R}^n$.

Satz 5: *Sei* $\mathscr{M} := \{x \mid \mathscr{A}\, x = c,\ \mathscr{A} \in \mathscr{A},\ c \in C\}$ *mit* $\mathscr{A} = \mathscr{B} + \mathscr{H}$, $\mathscr{H} \in (\mathbb{R}^+)^{n^2}$ *und* $\| |\mathscr{H}^{-1}| \| \, \| |\mathscr{B}| \| < 1$ *gegeben. Es gilt dann für die algebraische Lösung* X^* *der Gleichung*

$$\mathscr{B} * X + \mathscr{H} * \bar{X} = \bar{C} \tag{45}$$

die Beziehung $\mathscr{M} \subseteq X^*$.

Beweis: Es ist $\mathscr{A}\, x = c$, das heißt $(\mathscr{B} + \mathscr{H})\, x = c$ äquivalent mit $-\mathscr{H}\, x = \mathscr{B}\, x - c$ und schließlich mit

$$x = -\mathscr{H}^{-1} (\mathscr{B}\, x - c). \tag{46}$$

Das zur Fixpunktgleichung (46) gehörige Iterationsverfahren

$$x_{i+1} = -\mathscr{H}^{-1} (\mathscr{B}\, x_i - c)$$

konvergiert wegen $\| |\mathscr{H}^{-1}| \| \, \| |\mathscr{B}| \| < 1$ gegen ein $x^* \in \mathscr{M}$ für alle $\mathscr{B} \in \mathscr{B}$ und $c \in C$. Nach [1] bzw. [7] ist daher

$$X_{i+1} = -\mathscr{H}^{-1} * (\mathscr{B} * X_i - C)$$

wegen $\| |\mathscr{H}^{-1}| \| \, \| |\mathscr{B}| \| < 1$ ebenfalls gegen ein $X^* \in (\mathbb{I}\,\mathbb{R})^n$ konvergent mit $\mathscr{M} \subseteq X^*$. Die Auflösung der Fixpunktgleichung

$$X^* = -\mathscr{H}^{-1} * (\mathscr{B} * X^* - C)$$

liefert die algebraische Gleichung

$$\mathscr{B} * X^* + \mathscr{H} * \bar{X}^* = \bar{C}. \qquad \square$$

Literatur

[1] Alefeld, G., Herzberger, J.: Einführung in die Intervallrechnung. BI, Reihe Informatik (1974).

[2] Berti, S. N.: On The Interval Equation $Ax + B = Cx + D$. Revue d'analyse numérique et de la théorie de l'approximation Tome 2, 11—26 (1973).

[3] Kaucher, E.: Über metrische und algebraische Eigenschaften einiger beim numerischen Rechnen auftretender Räume. Dissertation, Universität Karlsruhe, 1973.

[4] Kaucher, E.: Allgemeine Einbettungssätze algebraischer Strukturen unter Erhaltung von verträglichen Ordnungs- und Verbandsstrukturen mit Anwendung in der Intervallrechnung. Erscheint in der ZAMM (1976).
[5] Kaucher, E.: Algebraische Erweiterungen der Intervallrechnung unter Erhaltung der Ordnungs- und Verbandsstrukturen. In diesem Band, S. 65—79.
[6] Kulisch, U.: Grundlagen des numerischen Rechnens. Niederschrift einer Vorlesung, gehalten im WS 1970/71 an der Universität Karlsruhe.
[7] Mayer, O.: Über die in der Intervallrechnung auftretenden Räume und einige Anwendungen. Dissertation, Universität Karlsruhe, 1969.
[8] Moore, R. E.: Interval Analysis. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall 1966.
[9] Ortolf, H.-J.: Einige Verallgemeinerungen der Intervallarithmetik. Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, Bonn (1969).
[10] Rådström, H.: An Embedding Theorem for Spaces of Convex Sets. Proc. Amer. Math. Soc. *3*, 165—169 (1952).
[11] Ratschek, H.: Teilbarkeitskriterium der Intervallarithmetik. J. Reine Angew. Math. *252* (1972).

Dr. E. Kaucher
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Karlsruhe
Englerstraße 2
D-7500 Karlsruhe
Bundesrepublik Deutschland