МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2004
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2004
Proceedings of the Thirty Third Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 1–4, 2004

НАУЧНОТО ДЕЛО НА ГЕОРГИ БРАДИСТИЛОВ

Георги Н. Бояджиев, Божидар Ив.Чешанков

1. Въведение. Дейността на чл.кор. проф. д-р Георги Делчев Брадистилов (1904–1977) бе изключително многостранна. Като научен работник-математик той има не само съществени приноси, но остави и научна школа, която продължава да се развива и разширява. Той беше отличен преподавател и ръководител на научни семинари, създаде педагогическа школа и написа многотомен учебник по висша математика за инженери, по който са обучавани десетки хиляди студенти. Неговата организационна и административна дейност в образованието не се ограничи с ръководство на катедрата по математика, но обхвана и по-високи равнища: декан, ректор, член-кореспондент на БАН. Той беше ярка, силна и независима личност. Беше винаги подготвен, акуратен, пословично дисциплиниран. Той очакваше и изискваше и другите да бъдат такива, но имаше и чувство за мярка, когато настояваше за изпълнението на свои виждания в образованието. Той беше реалист – изискваше най-доброто изпълнение, но не и невъзможното. Тези му качества, допълнени с достойното му поведение, умението да бъде тактичен в трудни моменти, прямотата и рационалното мислене му спечелиха уважението на многобройните студенти, приятели, познати и, което беше също важно, на политическите среди. Георги Брадистилов беше индивидуалист със свръхразвито чувство за обществена отговорност.

2. Докторска дисертация. Началото на научната дейност на Брадистилов, върху която се разви и неговата школа, започва с докторската му дисертация "Über periodische und asymptotische Lösungen beim n-fachen Pendel in der Ebene", защитена при известния математик О.Перон (Oscar Perron) в Мюнхен през 1938 г. Тя е отпечатана в престижното списание "Mathematische Annalen" (München 1938, Band 116, Heft 2, 181–203).

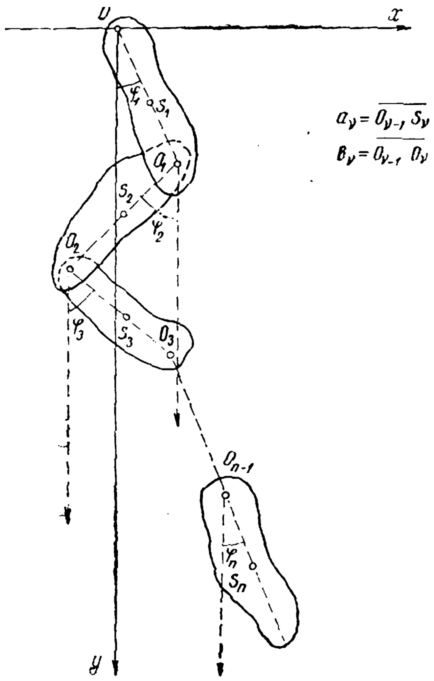
Можем да смятаме, че търсенето на периодични решения на една нелинейна система диференциани уравнения датира от А. Поанкаре, който в края на деветнадесетия век го прилага за изучаване на задачи от небесната механика (Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Paris, 1892). В много задачи, описващи се с диференциални уравнения, се появява група от членове, които могат да се приемат за малки по отношение на останалите. Ако се приеме, че пренебрегването на тези членове няма да повлияе съществено върху решението на изследваната задача, то така се получава една опростена система диференциални уравнения. Тогава можем да се ограничим с решението на тази система (която обикновено е линейна) или пък нейното решение да се използва като първо приближение за намиране на по-точно решение. Поанкаре използва този евристичен подход при изграждането на своя метод. Той разглежда нелинейни системи в нормален вид, неавтономна –

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda\right),\ i = 1, 2, \ldots, n$$

и автономна

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda\right),\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

където $X_i\left(.\right)$ са аналитични функции, а λ е малък параметър, и доказва при определени условия важни теореми за съществуването на периодични решения. Брадистилов изучава една механична система, която се описва от автономна система диференциални уравнения, която не е в нормален вид, но освен това използва едно нейно свойство, което опростява третирането на проблема.



Черт. 1

Ще изложим накратко основните идеи на докторската дисертация на Брадистилов. В правоъгълната координатна система Oxy, с положителна ос Oy насочена надолу, е разположена система от n махала, състояща се от n твърди тела, които се въртят около успоредни хоризонтални оси (перпендикулярни на равнината Oxy) и то така, че първото тяло се върти около постоянна ос O, второто – около ос O_1 от първото тяло и т.н. Центровете на тежестта $S_1, S_2, \ldots, S_n$ на твърдите тела лежат съответно върху правите $OO_1, O_1O_2, \ldots$ и т.н. така, че което и да е $O_{\nu-1}$ да не лежи между S_ν и O_ν, $S_\nu O_\nu$ е главна инерционна ос на ν-тото махало и ъгълът между оста Oy и посоката е означен с $\varphi_\nu, (\nu = 1, 2, \ldots, n)$ (Черт. 1). Масата на ν-тото махало е m_ν, а неговият инерционен момент (спрямо ос, която минава през S_ν и е перпендикулярна на равнината на Oxy) – е I_ν. Уравненията на Лагранж, приложени за системата махала (използват се кинетичната и потенциалната енергия на системата) водят до нелинейна система от n диференциални уравнения, всяко от втори ред:

$$
\begin{aligned}
&B_\nu \sum_{k=1}^{\nu-1} b_k \left[\cos\left(\varphi_\nu - \varphi_k\right)\varphi'' + \sin\left(\varphi_\nu - \varphi_k\right)\varphi'^2\right] + \left(A_\nu + I_\nu\right)\varphi_\nu'' + \\
&\qquad + b_\nu \sum_{k=\nu+1}^{n} B_k \left[\cos\left(\varphi_\nu - \varphi_k\right)\varphi'' + \sin\left(\varphi_\nu - \varphi_k\right)\varphi'^2\right] = -gB_\nu \sin\varphi_\nu, \\
&\nu = 1, 2, \ldots, n,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

където $A_\nu = a_\nu^2 m_\nu + b_\nu^2 \sum\limits_{k=\nu+1}^{n} m_k$ $B_\nu = a_\nu m_\nu + b_\nu \sum\limits_{k=\nu+1}^{n} m_k$, $a_\nu = \overline{O_{\nu-1}S_\nu}$, $b_\nu = \overline{O_{\nu-1}O_\nu}$ и g е земното ускорение.

Системата (1) притежава интересно и важно свойство (да го наречем П): ако едно нейно решение при две различни стойности на времето е тъждествено с равновесното положение, то това решение е периодично.

Наистина, ако (1) има решение $\varphi_\nu = \Phi_\nu(t)$, то тя също има за решение и $\varphi_\nu = -\Phi_\nu\left(2\omega - t\right)$, където ω е постоянна величина. Когато системата физични махала минава два пъти през равновесното положение, например при $t = 0$ и $t = \omega$, то

$$
\Phi\left(0\right) = 0 \qquad \text{и} \qquad \Phi\left(\omega\right) = 0
\tag{2}
$$

и тогава формулите

$$
\begin{aligned}
\varphi_\nu(t) &= \Phi_\nu(t) && \text{за} \quad 0 \le t \le \omega, \\
\varphi_\nu(t) &= -\Phi_\nu\left(2\omega - t\right) && \text{за} \quad \omega \le t \le 2\omega
\end{aligned}
$$

представляват едно периодично решение на (1) с период 2ω. Свойството П е използвано още от Перон, но вероятно е било известно и преди него. По същество (2) са гранични условия за системата (1).

Брадистилов отбелязва, че като следва Перон, въвежда малък параметър λ с полагането

$$
\varphi_\nu = \lambda\psi_\nu.
$$

При $\lambda = 0$ нелинейната система (1) се редуцира на пораждащата система, която е линейна. Тя има решение от вида $\psi_\nu = L_\nu e^{\rho t}$, където L_ν удовлетворяват линейната хомогенна алгебрична система

$$
B_\nu \rho^2 \sum_{k=1}^{\nu-1} b_k L_k + \left[\rho^2\left(A_\nu + I_\nu\right) + gB_\nu\right] L_\nu + b_\nu \rho^2 \sum_{k=\nu+1}^{n} B_k L_k = 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n.
$$

След елиминирането на L_ν се получава характеристичното уравнение на пораждащата система

$$
\begin{vmatrix}
\left(A_1 + I_1\right)\rho^2 + gB_1 & b_1 B_2 \rho^2 & \ldots & b_1 B_n \rho^2 \\
b_2 B_1 \rho^2 & \left(A_2 + I_2\right)\rho^2 + gB_2 & \ldots & b_2 B_n \rho^2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
b_n B_1 \rho^2 & b_n B_2 \rho^2 & \ldots & \left(A_n + I_n\right)\rho^2 + gB_n
\end{vmatrix} = 0.
\tag{3}
$$

Като полага в (3) $\rho^2 = \dfrac{g}{u}$, след умело опериране с детерминанти, Брадистилов доказва, че корените на характеристичното уравнение са чисто имагинерни: $\pm i\rho_1$,

$\pm i\rho_2, \ldots, \pm i\rho_n$. Прави се предположението, че корените са прости и че нито един корен не е кратен на друг. Този случай се отбелязва като некритичен. При доказателството за съществуване на периодични решения на (1) Брадистилов използва свойството за периодичност П, което дава възможност да се разгледат само n уравнения вместо $2n$.Той установява, че на всяка двойка корени $\pm i\rho_\nu$на характеристичното уравнение отговаря една фамилия периодични движения на системата махала в околността на устойчивото равновесно положение с приблизителен период $\dfrac{2\pi}{\rho_\nu}$.

В докторската дисертация се изучава също и въпросът за съществуването на периодични и асимптотични движения в околността на неустойчивото равновесно положение, когато p махала са насочени надолу и q махала – нагоре $(p + q = n)$. В този случай характеристичното уравнение на пораждащата система за системата махала притежава не само чисто имагинерни корени. На насочените надолу махала в некритичния случай отговарят периодични решения. Доказва се също съществуването на асимптотични решения, когато q махала са насочени нагоре. Тогава n-кратното физично махало при движението си в околността на равновесното положение загубва q фамилии периодични движения, като в замяна се появява една фамилия от асимптотични движения, зависеща от q параметъра.

В докторската дисертация е предложен и подходящ алгебричен метод за намиране на конфигурации на система от две математични махала в случая на периодични и асимптотични движения. Продължение и допълнение на докторската си дисертация Брадистилов дава в две следващи публикации: "Über periodische Bewegungen des n-fachen Pendels in der Ebene" (Math. Annalen, Bd 116, H 4, 1939) и "Съществуване и свойства на периодични движения на n последователно свързани физични махала в една равнина" (Год. на Софийския университет, т. 38, 1942), където се изследват свойства на периодичните решения.

3. Научна школа. В процеса както на обобщаване така и на видоизменяне и конкретизиране на тематиката поставена в докторската дисертация на Брадистилов се появи, оформи и продължава да се развива научната му школа. Значителен брой научни работници (математици и инженери) принадлежат към тази школа или са свързани до известна степен с нея. В смисъл, че са публикували работи по тази тематика в съавторство с Брадистилов, с негови ученици или пък самостоятелно.Школата на Брадистилов възникна най-вече благодарение на неговите лични качества и умения. Той говореше за математика с всички подходящо образовани, с които имаше контакт и най вече с асистентите си в катедрата по математика. Като неин ръководител, на катедрените съвети той изискваше отчет от всеки. Беше тактичен, търпелив и окуражаваше тези, които правеха първите си стъпки в науката. Винаги беше готов да помогне със съвети и идеи. Това той правеше и като ръководител на семинари в Математическия институт на БАН до последните дни от живота си. Да раздава научно познание бе за него както вътрешно лично удоволствие, така и морално задължение.

Заслужава да се отбележи, че както дисертацията на Брадистилов, така и публикации на негови ученици са цитирани и използвани в чужбина. Докторската дисертация е цитирана и използвана от G. Hamel в известната му книга "Theoretische Mechanik" (Berlin, 1949). Интересно е да се добави, че тя е предизвикала интерес в Япония сред някои учени, работещи върху уреди за земетресения. В монографията на Е. А. Барбашин и В. А. Табуева “Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством” (Наука, Москва, 1969) на научната дейност на Брадистилов е обърнато специално внимание и са цитирани освен докторската дисертация на Брадистилов още 10 публикации, от които 2 самостоятелни на Брадистилов, 4 в съавторство (3 с Г. Бояджиев и една с Г. Бояджиев и А. Писарев) и 4 на негови ученици (2 на С. Манолов, една на Г. Бояджиев и Н. Стоянов и една на В. Попов и Н. Стоянов).

4. Научна тематика в школата на Г. Брадистилов. От докторската дисертация на Г. Брадистилов произлизат три главни тематични направления:

I. Периодични и асимптотични решения на системи нелинейни диференциални уравнения с малък параметър, които описват различни типове последователно свързани махала. Махалата са математични, прътове, еластични и твърди тела. Те са разположени във вертикални равнини, някои от които са подложени на ротация, а някои са разположени във взаимно перпендикулярни равнини. Опората на окачване на махалото може да бъде подвижна.

В тази група от работи Брадистилов има над 20 публикации (самостоятелно или в съавторство). Ще споменем някои от тях, като заглавията им подсказват тематиката: “Релативни периодични движения на n-кратно физично махало, лежащо в равнина, свързана с въртяща се сфера около своята ос” (Год. на МЕИ, т. VIII, кн. 1, 1960), в съавторство с С. Манолов и Г. Бояджиев; “Съществуване на периодични движения на последователно свързани математични махала с еластични нишки” (Год. на МЕИ, т. IX, кн. 1, 1961) със съавтори Г. Бояджиев и А. Писарев.

От особено важно значение е работата на Брадистилов “Върху периодични решения на двойно физично махало около равновесното положение при кратни корени на характеристично уравнение” (Год. на МЕИ, т. II, кн. 1, 1955). По същество тя е продължение на докторската му дисертация, където случаят на кратни корени (критичният случай) не е бил разгледан. Заслугата на Брадистилов е, че той намери подходящ път за атакуването на проблема като при търсенето на периодични решения въведе един допълнителен параметър и показа как той може да бъде определян като корен на кубично уравнение. Да приемем, че корените на характеристичното уравнение на двойното махало са кратни помежду си, т.е. $\rho_2 = k\rho_1$, където k ($k > 1$) е цяло положително число. Тогава в зависимост от полученото кубично уравнение на корена ρ_2 може да отговарят една или три фамилии периодични решения. При това изследванията зависят също и от това дали $k \neq 3$ или $k = 3$.

Методиката, предложена от Брадистилов в тази работа, беше сполучливо приложена и развита в редица по-общи задачи, отнасящи се както до тази група, така и за работи от следващите две групи. Например тук може да се отбележи работата “Existenzer periodischer Bewegungen eines n-fachen Pendels im Falle, dass einige Wurzeln seiner charakteristischen Gleichung ein Vielfaches einer anderen sind” (Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Akademie Verlag, Bd. 39, H 7/8, 1959). Тук се предполага, че $p-1$ корени на характеристичното уравнение са кратни на друг. Въвеждат се $p-1$ параметри и се доказва, че при търсенето на периодични решения тези параметри се определят от алгебрична система от $p-1$ уравнения от четвърта степен.

В тази група се разглеждат и въпроси за устойчивост в смисъла на Ляпунов на периодичните решения за различни видове махала. Например такива са съвместните работи на Г. Брадистилов, Г. Бояджиев, Б. Чешанков – “Периодични решения и устойчивост на двойно физично махало, разположено в равнина, която се върти с променлива ъглова скорост” (Год. на ВТУЗ, Математика, т. I, кн. 1, 1964) и “Върху колебанията на n-кратно физично махало с подвижна точка на окачване” (Год. на ВТУЗ, Математика, т. I, кн. 3, 1964). Към тази група може да се отнесе и работата с приложен характер на Г. Брадистилов, М. Константинов, Г. Бояджиев “Върху движението на двумасова система при подемни съоръжения” (Год. на ВТУЗ, Математика, т. II, кн. 1, 1965), където в системата товар-количка, товарът е разгледан като математично махало.

II. Периодични решения и устойчивост на автономни и неавтономни системи нелинейни диференциални уравнения с малък параметър. Някои от тези системи притежават свойството П и могат да се разглеждат като обобщение на системи махала, принадлежащи към първата тематика. Типичен случай е работата на Г. Брадистилов и Г. Бояджиев “О периодических движениях одной консервативный системы с n степенями свободы в окрестности равновесного положения” (Nonlinear Vibration problems, Polish Ac. Sc, v. 6, 1964), където се предполага, че кинетичната и потенциална енергия на консервативната система са четни функции спрямо обобщените координати. От тук следва, че консервативната система, представена с уравненията на Лагранж притежава свойството П. Доказва се съществуването на периодични решения, както когато корените на характеристичното уравнение не са кратни помежду си, така и в критичния случай при кратни корени. Разгледани са също и системи в критичния случай, които не притежават свойството П. Тук ще отбележим две работи на Брадистилов (в съавторство) – “Периодични решения на една автономна система диференциални уравнения при кратни корени на фундаменталното уравнение” (БАН, Известия на Мат. Институт, т. X, 1966) със съавтори Г. Бояджиев и В. Лубих. Там е разгледана системата

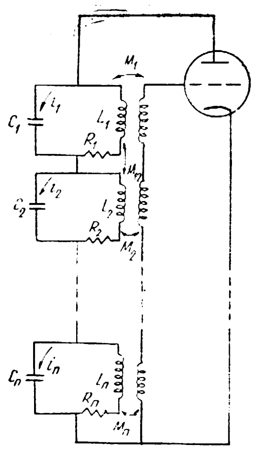
$$A\ddot{x} + Bx = \lambda f\left(x, \dot{x}, \lambda\right),$$

където A и B са постоянни $n \times n$ матрици, x и f — n-мерни вектори, а λ е малък параметър. Предполага се, че характеристичното уравнение има само чисто имагинерни корени. Разглежда се критичният случай $\rho_2 = k\rho_1$, $k > 1$ и е цяло число. И още “Periodic Solutions of a Weakly Nonlineear Autonomous System of Differential Equations in the Critical Case” (Comptes Rendus del’ Academie bulgare des Sciences t. 22, No 10, 1969), съавтор Г. Бояджиев. Там се разглежда системата

$$\begin{aligned}
&\ddot{x}_i + \omega_i^2 x = \varepsilon f_i(x, \dot{x}, \varepsilon), && i = 1, 2, \ldots, m,\\
&\ddot{x}_j + 2a_j\dot{x}_j + \omega_j^2 x = \varepsilon f_j(x, \dot{x}, \varepsilon), && j = m+1, \ldots, n,\\
&\ddot{x}_l + \omega_l^2 x = \varepsilon f_l(x, \dot{x}, \varepsilon), && l = n+1, \ldots, N,
\end{aligned}$$

където x и f са N-мерни вектори. Векторът f е аналитична функция на $x(t), \dot{x}(t)$ и на малкия параметър ε. Доказва се съществуване на периодични решение при критичния случай (кратни честоти): $\omega_r = \kappa_r\omega_1$, $r = 2, \ldots, p$, $p \leq m$, κ_r са цели числа. Същата система при некритичния случай е разгледана от известния математик Ламберто Чезари (Lamberto Cesari) и е доказано съществуване на периодични решения. Към тази група могат да се отнесат и публикации на някои ученици на Брадистилов, които разглеждат въпроси за устойчивост на периодични решения.

III. Нелинейни колебания и устойчивост на автогенератори и генератори. Изведени са съответните системи диференциални уравнения, които описват колебанията на различни видове автогенератори и генератори и са изучени периодичните им решения. В редица случаи са намерени и условия за устойчивост на решенията. Изследванията в тази тематика започват с две работи на Брадистилов. Първата (в съавторство с Г. Бояджиев и Ю. Маринов) е озаглавена "Върху условията за съществуване на периодични колебания на автогенератор на сигнали с две честоти", (Год. на МЕИ, т. VIII, кн. 1, 1961). В нея се разглежда автогенератор с две честоти при "мек" режим на самовъзбуждане, когато двата контура са електромагнитно екранирани и са пренебрегнати решетъчните токове. Уравненията, които описват колебанията на контурите се извеждат с помощта на втория закон на Кирхов. Определени са условията, при които се получават периодични колебания на автогенератора. Да отбележим, че тук условието за периодичност П не е в сила. Във втората работа (със съавтор Г. Бояджиев) – "Устойчивост на периодичните колебания на автогенератор на сигнали с две честоти" (Год. на МЕИ, т. X, кн. 1, 1961) се намират условията за устойчивост по Ляпунов на периодичните колебания, установени в първата работа. Брадистилов постави началото на по-общи изследвания в тази област с публикацията "Периодични колебания на автогенератор с n трептящи кръга" (Год. на МЕИ, т. XIII, кн. 1, 1963). На Черт. 2 е дадена схемата



Черт. 2

на автогенератора, където L_ν са индуктивностите, C_ν – капацитетите, R_ν – активните съпротивления на n-те кръга, M_ν – взаимните индуктивности между кръговете и бобините за обратна връзка и $M_{\nu s}$ – взаимната индуктивност между бобините на ν-тия и s-тия кръг. От втория закон на Кирхов се получава системата интегро-диференциални уравнения, която свързва токовете i_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ и анодния ток i_a:

$$L_\nu \frac{di_\nu}{dt} + R_\nu i_\nu + \frac{1}{C_\nu}\int\limits_0^t i_\nu dt = M_\nu \frac{di_a}{dt} + \sum_{s=1 (s\neq\nu)}^{n} M_{\nu s}\frac{di_s}{dt}, \tag{4}$$

$$M_{\nu s} = M_{s\nu}, \qquad s,\nu = 1,2,\ldots,n.$$

Разглежда се мек режим на самовъзбуждане. Тогава връзката между напреженията

$$u_\nu = \frac{1}{C_\nu}\int\limits_0^t i_\nu dt$$

в кръговете и анодния ток i_a се дава със зависимостта

$$i_a = a_0 + a_1 \sum_{k=1}^{n} u_k + a_3\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)^3,$$

където a_0, a_1, a_3 са дадени коефициенти, които характеризират нелинейността на автогенератора.

След редица преобразования системата (4) се свежда до

$$\ddot{x}_\nu + \omega_\nu^2 x_\nu = \lambda\frac{\omega_\nu^2}{\omega_1}\left\{k_\nu \dot{x}_\nu - \frac{M_\nu}{M_1}\left(\sum_{k=1}^{n}\dot{x}_k\right)^2 \sum_{k=1}^{n}\dot{x}_k + Mb_0\sum_{s=1}^{n}\dot{x}_s + \sum_{s=1(s\neq\nu)}^{n} l_{\nu s}C_s\ddot{x}_s\right\}, \tag{5}$$

$$\nu = 1,2,\ldots,n,$$

където

$$x_\nu = u_\nu\sqrt{\frac{M_1 S_2}{M_1 S_0 - C_1 R_1}},\ S_0 = a_0,\ S_2 = -3a_3, \omega_\nu^2 = \frac{1}{L_\nu C_\nu}.$$

За малък параметър е избрана величината

$$\lambda = \omega_1\left(M_1 S_0 - C_1 R_1\right)$$

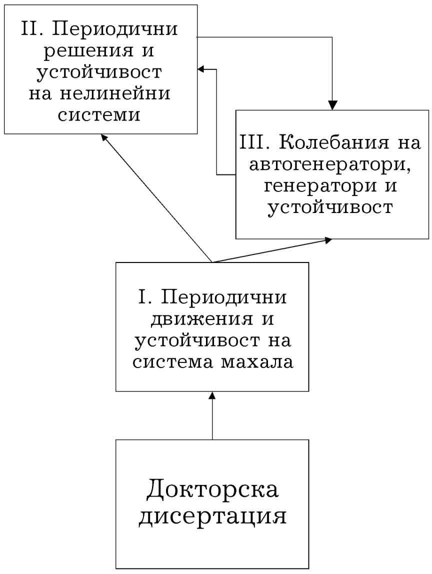
и е прието, че

$$\omega_1\left(M_\nu S_0 - C_\nu R_\nu\right) = k_\nu\lambda, \qquad \nu = 2,3,\ldots,n,$$
$$\omega_1 S_0 = b_0\lambda,\ \omega_1 M_{\nu s} = l_{\nu s}\lambda, \qquad \nu, s = 1,2,\ldots,n.$$

За системата (5) са намерени условията за съществуване на периодични колебания с приблизителен период $\dfrac{2\pi}{\omega_1}$. Аналогично могат да се намерят периодични колебания с приблизителен период $\dfrac{2\pi}{\omega_\nu}$, $\nu = 2,3,\ldots,n$ при предположение, че $\dfrac{\omega_k}{\omega_\nu}$ не е цяло число (некритичен случай). Критичният случай за колебания на автогенератор с два трептящи кръга е разгледан в друга работа на Брадистилов (в съавторство).

Ако в дясната страна на системата (4) се прибави сумата $\sum\limits_{s=1}^{n} P_{\nu s}\sin q_s t$, то се получава система диференциални уравнения, която описва колебанията на генератор с n трептящи кръга. Тази система е неавтономна и изисква по-различно третиране. В публикацията: “Allgemeiner Fall der periodischen Schwingungen eines Oszillators mit n Schwingkreisen bei unabhängiger Erregung" (Wissenschafliche Zeitschrift der Elektrotechnik, 3, Leipzig, 1964, съавтор Г.Бояджиев) се доказва съществуването на периодично решение с период $\frac{2\pi}{q_1}$, ако числата ω_ν не са кратни на q_1 (некритичен случай). Няколко следващи публикации на Брадистилов (в съавторство) третират общи нелинейни автономни и неавтономни диференциални уравнения и установяват съществуването на периодични решения. Разгледан е също и критичният случай. В някои случаи се намират условия за устойчивост за намерените периодични решения. Като илюстрация в тези работи са дадени резултати за различни видове автогенератори и генератори. Тези публикации са в тясна връзка с тематиката от второто направление и биха могли да се класифицират и там.

Връзката на докторската дисертация на Брадистилов с трите основни тематични направления, които произхождат от нея, а също и взаимните им зависимости са показани на следния Черт. 3.



Черт. 3

5. Други трудове. Тук трябва да се отнесат някои важни постижения на Брадистилов (в съавторство със световно известния български физико-химик , утвърдил се в Германия – проф. д-р И. Н. Странски (1897-1979)) в областта на електростатичния потенциал. Ще посочим работата "Über die Gleichgewichtsform des Fluoritkristalls", Zeitschrift für Kristallkunde, 103, 1, (1940) (G. D. Bradistilov und I. N. Stranski). Тя е цитирана в претърпялата няколко издания монография: Dr. Will Kleber, Angewandte Gitterphysik, Berlin 1960. В нея са намерени бързо сходящи редове за пресмятане на електростатичните потенциали и работата при отделяне на дискретни молекули в различни точки на флуоритната решетка, което се използва за определяне на формата на растене и равновесната форма на флуоритния кристал.

Брадистилов е публикувал и редица научно-популярни и методични статии в списанието на Физико-математическото дружество. Ще посочим "Методи за решаване на конструктивни задачи", г. XXII, кн. 2, 1936, 37–56, "Върху многократните точки на равнинните криви", г. XXV, кн. 1/2, 245–255. Във встъпителната си лекция като новоизбран доцент, Брадистилов е разгледал някои въпроси от популационната динамика – модела на Лотка-Волтера. Единият от пишещите тези редове (Г. Бояджиев) бе дълбоко впечатлен от тези проблеми и впоследствие успя да свърже методиката на Брадистилов в областта на периодичните колебания с нови изследвания в динамиката на популациите.

6. Наследството на Георги Брадистилов. Георги Брадистилов почина през 1977 г. 100 години ни делят от рождението му и 27 от неговата смърт. Какво е наследството, оставено от него?

Безспорно това са научните публикации, популярни книги и статии, и широко разпространените учебници и сборници. Това наследство е значително и осигурява завидно място на Брадистилов в българската математика и образование.

Неговото педагогическо майсторство и научни постижения го направиха една от легендите на инженерното образование. Не случайно една от улиците, които минават покрай Техническия университет – София носи неговото име.

Но той ни остави и друго наследство - научната школа, създадена от него, ученици и сътрудници, които продължават и досега да развиват методиката и тематиката на Брадистилов. Те я свързаха със съвременни клонове на математиката и нейни приложения. Да споменем тук резултати от теория на управлението, асимптотични методи в нелинейните колебания, периодични решения и устойчивост на динамични системи, уравнения със закъснение, динамика на популациите. Първата генерация от ученици на Брадистилов отдавна мина зрялата си възраст, мнозина от тях не са вече между нас. Но тази първа вълна създаде свои по-млади сътрудници (втора генерация), които продължават да работят и да развиват неговите идеи. Това "живо" и динамично наследство неразделно свързва името на Георги Брадистилов с родната математическа наука. Без личности като Брадистилов математическата наука, а и всяка друга наука, не само в България, но и където и да е, би загубила своята жизненост и представителност.

Забележка: Авторите отбелязват, че са ползвали интересната и написана с голямо разбиране статия на проф. д-р м.н. Спас Манолов, посветена на Геори Брадистилов, отпечатана в книгата "Български математици", ДИ "Народна просвета", София, 1987, 159–164.

Накрая прилагаме списък от публикациите на Георги Брадистилов. За колективните работи съавторите са дадени в скоби. При всички колективни работи името на Брадистилов е на първо място.

[1] Методи за решаване на конструктивни задачи. *Физико-математическо списание*, г. XXII, кн. 2 (1936), 37–56.

[2] Über periodische und asymptotische Lösungen beim n-fachen Pendel in der Ebene. *Mathematische Annalen*, Band **116**, H 2 (1938), 181–203.

[3] Über periodische Bewegungen des n-fachen Pendels in der Ebene. *Math. Annalen*, Bd **116**, H 4, 1939.

[4] Върху многократните точки на равнинните криви. *Физико-математическо списание*, г. XXV, кн. 1/2 (1939), 245–255.
[5] Über die Gleichgewichtsform des Fluoritkristalls. *Zeitschrift für Kristallkunde*, **103**, 1 (1940) (I. N. Stranski).
[6] Съществуване и свойства на периодични движения на n последователно свързани физични махала в една равнина. *Год. на Софийския университет*, т. **38** (1942).
[7] Разположение на едно тройно математично махало в една равнина при периодичните му и асимптотични движения около равновесното положение. *Год. на МЕИ*, т. **I**, кн. 1 (1954), 39–78.
[8] Разположение на една система от три последователно свързани математични махала в една равнина при периодичните й движения около стабилното равновесно положение. *Год. на Държавна Политехника*, т. **V**, кн. 1 (1954), 303–313.
[9] Разположение на една система от три последователно свързани математични махала в една равнина при периодичните ѝ движения около стабилното равновесно положение. *Известия на МИ БАН*, т. **I**, кн. 2 (1954), 135–145.
[10] Положение трех последовательно соединенных математических маятников, находящихся в одной плоскости, при их периодических движениях вокруг положения устойчивого равновесия. *ПММ*, **19**, є 1 (1955), 113–118.
[11] Положение тройного математического маятника в плоскости при его периодическом и асимпотическом движении вокруг положения равновесия. *ПММ*, **19**, є 4 (1955), 485–492.
[12] Sur les solution pèriodiques et asymptotiques du mouvement autour de l'ètat d'èquilibre d'un systèm de n-pendules physiques successivement liès dans un plan. *C. R. Acad. bulg. Sci.*, **8**, No 4 (1955), 5–8.
[13] Върху периодични движения на двойно махало, лежащо във вертикална равнина, при кратни корени на характеристичното уравнение. *Год. на МЕИ*, т. **II**, кн. 1 (1955), 1–13.
[14] Върху корените на характеристичното уравнение на движението на една система от n последователно свързани махала, лежащи в една равнина около равновесното положение. *Год. на МЕИ*, т. **III**, кн. 1 (1957), 3–8.
[15] Върху релативните периодични движения на n-кратно физично махало в една равнина, подложена на ротация с постоянна скорост. *Год. на МЕИ*, т. **III**, кн. 1 (1957), 9–19, (Г. Бояджиев).
[16] Върху съществуването на периодични движения на двойното физично махало в равнината при кратни корени на характеристичното уравнение. *Известия на МИ БАН*, т. **II**, кн. 2 (1957), 73–85.
[17] Релативни периодични движения на двойно физично махало, лежащо във вертикална равнина, подложена на равномерна ротация при кратни корени на характеристичното уравнение, *Год. на МЕИ*, т. **III**, кн. 1, (1957) 3–14, (Г. Бояджиев).
[18] Mouvements relatifs pèriodiques et asymptotiques de n-pendules physique multiples dans un plan. *C. R. Acad. bulg. Sci.*, **10**, No 4 (1957), 443–446, (G. Bojadjiev).
[19] Периодични движения на тройно махало, лежащо във вертикална равнина, при кратни корени на характеристичното уравнение. *Год. на МЕИ*, т. **IV**, кн. 1 (1958), 21–31, (Г. Бояджиев).
[20] Релативни периодични и асимтотични движения на n-кратно физично махало в една равнина, подложена на ротация с постоянна скорост. *Год. на МЕИ*, т. **IV**, кн. 1 (1958), 3–19, (Г. Бояджиев).
[21] Съществуване на периодични движения на n-кратно махало при кратни корени на характеристичното му уравнение. *Год. на МЕИ*, т. **IV**, кн. 3 (1958), 87–112, (Г. Бояджиев).
[22] Съществуване на релативни периодични движения на n-кратно махало в една равнина, подложена на ротация при кратни корени на характеристичното му уравнение. *Год. на МЕИ*, т. **IV**, кн. 3 (1958), 113–124, (Г. Бояджиев).

[23] Релативни периодични движения на една система от n физични махала, разположени във вертикална равнина, която се върти около нейна вертикална ос. *Год. на МЕИ*, т. **V**, кн. 1 (1959), 3–21, (Г. Бояджиев).

[24] Релативни периодични и асимптотични движения на n-кратно физично махало в една равнина, подложена на ротация с постоянна скорост. *Известия на МИ БАН*, т. **III**, кн. 2 (1959), 19–37, (Г. Бояджиев).

[25] Съществуване на периодични и асимптотични движения на n физични махала, разположени в перпендикулярни равнини. *Год. на МЕИ*, т. **V**, кн. 1 (1959), 23–27, (Г. Бояджиев).

[26] Existenz periodischer Bewegungen eines n-fachen Pendels im Falle, dass einige Wurzeln seiner charakteristischen Gleichung ein Vielfaches einer anderen sind. *ZAMM*, **39**, No 7–8, 284–290, (G. Bojadziev).

[27] Общ случай на релативните периодични движения на двойно физично махало, лежащо в една равнина, подложена на ротация. *Год. на МЕИ*, т. **VI**, кн. 1 (1960), 1–12, (Г. Бояджиев).

[28] Върху условията за съществуване на периодични колебания на автогенератор на сигнали с две честоти. *Год. на МЕИ*, т. **VIII**, кн. 1 (1961), 15–24, (Г. Бояджиев, Ю. Маринов).

[29] Релативни периодични движения на n-кратно физично махало, лежащо в равнина, свързана с въртяща се сфера около своята ос. *Год. на МЕИ*, т. **VIII**, кн. 1 (1961), 1–14, (С. Манолов, Г. Бояджиев).

[30] Съществуване на периодични движения на математично махало с еластична нишка. *Год. на МЕИ*, т. **VIII**, кн. 1 (1961), 25–28, (М. Константинов, А. Писарев).

[31] Устойчивост на периодичните движения на двойно физично махало. *Год. на МЕИ*, т. **VII**, кн. 1 (1961), 2–14, (Г. Бояджиев).

[32] Върху периодични движения на n-кратно физично махало около стабилното равновесно положение. *Год. на МЕИ*, т. **IX**, кн. 1 (1962), 11–22, (Г. Бояджиев).

[33] Периодични и асимптотични движения на n последователно свързани математически махала с еластични нишки. *Год. на МЕИ*, т. **X**, кн. 1 (1962), 21–28, (Г. Бояджиев).

[34] Периодични колебания и устойчивост на автогенератор на сигнали с две честоти при индуктивна връзка между честотоопределящите трептящи кръгове. *Год. на МЕИ*, т. **X**, кн. 1 (1962), 11–20, (Г. Бояджиев, В. Попов, Ю. Маринов).

[35] Съществуване на периодични движения на n последователно свързани математични махала с еластични нишки. *Год. на МЕИ*, т. **IX**, кн. 1 (1962), 1–10, (Г. Бояджиев, А. Писарев).

[36] Устойчивост на периодичните колебания на автогенератор на сигнали с две честоти. *Год. на МЕИ*, т. **X**, кн. 1 (1962?), 1–10, (Г. Бояджиев).

[37] Cas gènèral des mouvements pèriodiques rèlatifs d'un pendule physique double situè dans un plan à rotation. *Bul. Inst. Politechn., Sèrie noua*, **8(12)** (1962), No 1-2 (G. Bojadziev).

[38] Върху периодичните движения на една консервативна система с n степени на свобода в околността на равновесното положение. *Год. на МЕИ*, т. **XII**, кн. 1 (1963), 5–8, (Г. Бояджиев).

[39] Периодические и асимптотические движения сложных физических маятников, последовательно связанных и расположенных в одной вертикальной плоскости. Труды международного симпозиума по нелинейным колебаниям, АН УССР, **1** (1963), 166–171.

[40] Свойства на периодичните движения на система от n последователно свързани математични махала с еластични нишки. *Год. на МЕИ*, т. **XII**, кн. 1 (1963?), 9–18, (Г. Бояджиев, А. Писарев).

[41] Существование периодических движений nпоследовательно связанных математических маятников с упругими нитями. *Доклады БАН*, **16**, кн. 1 (1963), 7–10, (Г. Бояджиев, А. Писарев).

[42] Существование периодических и асимптотических движений последовательно связанных математических маятником с упругими нитями. *Nonlinear Vibtation Problems*, Polish Ac. Sc., **5** (1963), 102–107, (Г. Бояджиев).
[43] О периодических движениях одной консервативный системы сn степенями свободы в окрестности равновесного положения. *Nonlinear Vibration Problems*, Polish Ac. Sc., **6** (1964), 63–69, (Г. Бояджиев).
[44] Периодични движения на еластично математично махало с подвижна опора. *Год. на МЕИ*, т. **XIII**, кн. 1 (1964), 7–12, (Г. Бояджиев, А. Писарев).
[45] Периодични колебания на автогенератор с n трептящи кръга. *Год. на МЕИ*, т. **XIII**, кн. 1 (1964), 1–6.
[46] Allgemeiner Fall der periodischen Schwingungen eines Oszillators mit n Schwingkreisen bei unabhängiger Erregung. *Wissenschafliche Zeitschrift der Elektrotechnik*, **3**, Leipzig (1964), 185–189, (Г. Бояджиев).
[47] Върху колебанията на n-кратно физично махало с подвижна точка на окачване. *Год. на ВТУЗ Математика*, т. **I**, кн. 3 (1965), 111–122, (Г. Бояджиев, Б. Чешанков).
[48] Върху периодичните решения на една автономна система и приложението ѝ за автогенератори с n трептящи кръга. *Год. на ВТУЗ Математика*, т. **I**, кн. 1 (1965), 5–14, (Г. Бояджиев).
[49] Общ случай на периодични колебания на автогенератор с независимо възбуждане с n трептящи кръга. *Год. на МЕИ*, т. **XV**, кн. 1 (1965), 17–22, (Г. Бояджиев).
[50] Периодични движения и устойчивост на двойно физично махало, разположено в равнина, която се върти с променлива ъглова скорост. *Год. на ВТУЗ Математика*, т. **I**, кн. 1 (1965), 33–44, (Г. Бояджиев, Б. Чешанков).
[51] Периодични движения на една консервативна система с n степени на свобода в околността на равновесното положение при кратни корени на характеристичното уравнение. *Год. на МЕИ*, т. **XV**, кн.1 (1965), 1–8, (Г. Бояджиев).
[52] Периодични движения на еластично математично махало. *Год. на МЕИ*, т. **XV**, кн. 1 (1965?), 9–16, (А. Писарев, Н. Стоянов).
[53] Съществуване на периодични колебания на автогенератор с два трептящи кръга при кратни корени на характеристичното уравнение. *Год. на ВТУЗ Математика*, т. **I**, кн. 1 (1965), 15–22, (Г. Бояджиев, В. Лубих).
[54] Устойчивост на периодични решения на две системи диференциални уравнения и приложение за автогенератор с n трептящи кръга. *Год. на ВТУЗ Математика*, т. **I**, кн. 1 (1965), 23–32, (Г. Бояджиев, В. Попов, К. Мишев).
[55] Über die Bewegung von Hebezeugen, behandelt wie ein Zweimassensystem, Vertragssammelband der internationalen Konferenz “Mechanismen und Maschinen”, Varna 1965, Bd. III, 131–138, (M. Konstantinov, G. Bojadziev).
[56] Върху движението на двумасова система при подемни съоръжения. *Год. на ВТУЗ Математика*, т. **II**, кн. 1 (1966), 97–102, (М. Константинов, Г. Бояджиев).
[57] Периодични решения на една автономна система диференциални уравнения при кратни корени на фундаменталното уравнение. *Известия на МИ БАН*, т. **X** (1966), (Г. Бояджиев и В. Лубих).
[58] Periodic Solutions of a Weakly Nonlinear Autonomous System of Differential Equations in the Critical Case. *Compt. Rend. Acad. bulg. Sci.*, **22**, No 10 (1969), (Г. Бояджиев).

Георги Бояджиев
835 Farmeigh Rd.
West Vancouver, B. C.
Canada, V7S 1Z8
e-mail: `mbojad@sprint.ca`

Божидар Чешанков
ТУ – София
ФПМИ
e-mail: `chesh@tu-sofia.bg`