МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2007
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2007
Proceedings of the Thirty Sixth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
St. Konstantin & Elena resort, Varna, April 2–6, 2007

ЛЕОНАРД ОЙЛЕР – МАТЕМАТИКЪТ НА XVIII ВЕК

Иван Димовски, Мариян Илиев

Тази година човечеството ще отбележи 300 години от рождението на Леонард Ойлер – най-големият математик на XVIII век. Но, освен тази общоприета и общоизвестна оценка за Ойлер има и друга. И тя е на Клифорд Труздел, един от най-големите познавачи на творчеството на Ойлер. Според Труздел "Ойлер е най-великият математик на всички времена". Труздел продължава: "... но той е само математик, сиреч не магьосник, не пророк и не спасител. Той се занимава с математика, воден от убеждението, че този свят се управлява от най-добрите природни закони. Той вярва, че особена предопределена на човека задача е чрез разбиране на тези закони да открива и да развива заложените у него възможности за усъвършенстване. Великата книга на природата е отворена пред нас, но тя е написана на език, който трябва да се научим да четем само със собственото си трудолюбие, с любов и страдание. Този език е математиката." С други думи: Ойлер е професионален математик — най-големият в историята на математиката.

Ойлер не може да се нарече нито "чист", нито "приложен" математик. При него тези две страни на математическото творчество са неотделими. Това напомня и втората част от цитираното изказване на Трудвел. В нея се перифразира знаменитата мисъл на Галилей: "Философията е написана във величествена книга (имам предвид Вселената), която е постоянно отворена пред нашия взор, но да я разбере може само онзи, който първо се научи да разбира езика ѝ и да тълкува знаците, с които тя е написана. А тя е написана на езика на математиката и знаците ѝ са триъгълници, окръжности и други геометрични фигури, без които човек не би могъл да разбере нито една дума; без тях той би бил обречен да блуждае в мрак из лабиринт." За разлика обаче от Галилей, за Ойлер тази книга е написана на езика на математическия анализ, а не на езика на геометрията. В ръцете на Ойлер математическият анализ се превръща в мощно оръжие на човешкото познание.

Великият Нютон, като един от създателите на математическия анализ, е направил своите открития в механиката изключително с негова помощ, но в основното си произведение "Математически принципи на натуралната философия" той се опитва старателно да скрие това, като използва неадекватния език на евклидовата геометрия. Използването на математическия анализ позволява на Ойлер да изгради механиката на твърдите тела и да направи първите стъпки в механиката на непрекъснатите среди. В този доклад обаче се ограничаваме само до чисто математическото творчество на Ойлер.

Впечатляващ е списъкът на математическите дисциплини, водещи началото си от Ойлер или съществено обогатени от него: инфинитезимално смятане, обикновени и частни диференциални уравнения, вариационно смятане, диференциална геометрия, теория на числата, теория на графите, комбинаторна топология, специални функции, сумиране на безкрайни редове и т.н. Ако търсим аналог на Ойлер в българската математика, тук можем да посочим само името на акад. Никола Обрешков (при цялата условност на това сравнение).

Ойлер е син на Века на Просвещението, най-ярките представители на който са френските учени Дидро, Даламбер, Волтер и Русо – духовни водачи на своето време. Макар и лично да се е познавал с някои от тях, Ойлер не може да бъде причислен към тяхната кохорта. Изглежда пречка за това е била дълбоката религиозност на Ойлер, водеща началото си от неговия произход като син на швейцарски пастор. Това е причината Труздел да каже, че Ойлер е само математик. Руският академик Л. Д. Фадеев казва, че математикът Ойлер може да бъде сравняван само с музиканта Йохан Себастиан Бах, който е негов съвременник и велик реформатор на музиката. И все пак Ойлер не е бил безразличен към идейните веения на своето време. Например, той отхвърля солипсизма на Бъркли по същия начин, по който това прави Дидро, отрича учението на Лайбниц за монадите като противоречащо на свободата на човешката воля, въпреки че в математиката той е непосредствен продължител на делото на Лайбниц.

300 годишнината от рождението на Леонард Ойлер ще бъде отбелязана на много места по света, но на три от тях, се предвиждат грандиозни чествания, подготовката за които е в разгара си. И това са градовете, в които е преминал жизнения път на Ойлер – Базел (1707–1727), Санкт Петербург (1727–1741) и (1766–1783) и Берлин (1741–1766).

Базелски период (1707–1727). Леонард Ойлер е роден на 15 април 1707 година в град Базел в семейството на лутеранския пастор Паул Ойлер. Майката на Ойлер произхождала от образовано базелско семейство, а бащата е имал математически интереси, за които свидетелства посещаването на лекции на Якоб Бернули. Ойлер дължи на баща си първоначалното запознаване с математиката, а първата математическа книга, която той е прочел е била алгебрата на Рудолф, която носи странното за нас име "Кос" (от италианската дума "cossa" – нещо, употребявана в смисъл на неизвестно; от тук идва името на цяло направление в немската математика на 16-ти век – "косисти"). Вероятно към 1713 година родителите изпращат Ойлер в базелското латинско училище, в което за облекчаване на учениците математиката била изхвърлена от учебните предмети. Затова баща му наема частен учител по математика за Ойлер.

През 1720 година Ойлер постъпва в Базелския университет, на 13 годишна възраст, което не е нещо необикновено за онова време. Първо учи във философския факултет, а през 1724 година получава магистърска степен. Ойлер слуша задължителните за начинаещи лекции по: геометрия (1721-1722), теоретична и приложна аритметика (1721-1722) и астрономия (1724-1725), които четял Йохан Бернули. Тези лекции били четени с явна неохота от Бернули, който предпочитал да изнася частни лекции за избрани студенти. Между слушателите на Бернули били такива прославени по-късно имена като: Кьониг, Лопитал, Мопертюи, Клеро и Крамер. Ойлер се стремял да попадне на тези лекции, но желанието му не било удовлетворено поради заетостта на Бернули. В крайна сметка все пак го приел, но се занимавал с него като му препоръчвал различни математически съчинения и беседвал с него всяка събота. Ойлер се стремял да пита колкото е възможно по-малко и до края на живота си се е хвалел с това. Йохан Бернули, макар и най-големият математик на своето време, бил крайно сприхав и ревниво подозрителен към колегите си, че му крадат идеите. Що се отнася до Ойлер, Бернули направил изключение. Във втория том на своите събрани съчинения той пише следното за 20-годишния Ойлер: "... от неговата проницателност ние очакваме най-много, след като видяхме с каква лекота и откривателска дарба той, под наша закрила, прониква в светая светих на висшата математика. Изглежда Бернули е повлиял върху бащата на Ойлер за да го откаже от намерението му да насочи сина си да следва богословие.

Първата математическа работа на Ойлер, написана на 18 годишна възраст, е под влиянието на знаменитата задача от 1695 година на Йохан Бернули за брахистохроната. В нея се решава същата задача, но в съпротивителна среда. Наред със задачата на Бернули, това са първи стъпки в създаденото по-късно от Ойлер и Лагранж вариационно смятане.

Ойлер прави дързък опит за участие в конкурс на Парижката академия за решаване на следната задача: Да се намери най-подходящото място върху палубата на кораб за поставяне на мачта, както и оптималната ѝ дължина. Ойлер не получава наградата, но работата му е отпечатана в Париж през 1728 година. Изглежда тази работа е породила анекдоти за "Швейцарския Планински Флот". По-късно Ойлер получава общо 12 награди на Парижката академия. През 1726 година Ойлер кандидатства за професорско място по физика, но въпреки препоръките на Й. Бернули не е назначен – явно заради 19 годишната му възраст.

Първи Санкт Петербургски период (1727–1741). През 1727 година – годината на смъртта на Нютон – Ойлер решава окончателно да напусне родния си град Базел и да постъпи като професор в новооснованата Петербургска академия на науките при синовете на Йохан Бернули – Никлаус и Даниел. Професорската заплата от 600 рубли позволила на Ойлер да се ожени през 1734 година за дъщерята на живеещия в Петербург художник Георг Гзел – Катарина Гзел. Бракът е щастлив, от който Ойлер има 13 деца. Живи остават само пет – трима сина и две дъщери. През този първи руски период Ойлер проявява необикновената си работоспособност не само в математиката, но и в много други дейности, с които е натоварен от Академията: работи в географския департамент, става член на комисия по мерки и теглилки, чете лекции в кадетското училище. Участва в подготовката на голяма експедиция до Камчатка. През 1738 година Ойлер ослепява с едното си око вследствие на абсцес.

От този период датират първите забележителни постижения в теорията на числата. Единственият му предшественик е френският математик Пиер Ферма. Век по-рано Ферма е изказал без доказателство редица твърдения от теорията на числата. Ойлер доказва повечето от тях, а останалите опровергава. На първо място Ойлер доказва тъй наречената "Малка теорема на Ферма", която гласи, че ако p е просто число, а a е число, взаимно просто с p, то $a^{p-1}-1$ се дели на p. През 1640 година Ферма изказва хипотезата, че всички числа от вида $F_n = 2^{2^n}+1$, $n = 0, 1, 2, \dots$ са прости. Ойлер опровергава това твърдение с контрапримера: $F_5 = 2^{2^5}+1 = 641 \times 6700417$. И до ден днешен не е известно дали измежду числата на Ферма има безбройно много прости. Простите числа на Ферма играят важна роля в теорията на кодирането.

През 1729 година Ойлер търси функция $y = f(x)$, която за $n = 1, 2, 3, \dots$ да приема стойностите $1!, 2!, 3!, \dots$, т.е. да интерполира факториелите. Така той стига до гама-функцията, а също и до бета-функцията.

През този период Ойлер настойчиво се опитва да осмисли понятието сума на безкраен ред. Още Нютон използва широко степенни редове за обосноваване на създаденото от него флуксионно смятане, но с неизяснено понятие за сума на такъв ред. Лайбниц разглежда реда $1-1+1-1+1-1+\cdots$ и смята, че за негова сума трябва да се приеме числото $\frac{1}{2}$, като "най-вероятно". Ойлер смята за по-разумно да се тръгне от развитието $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$, което при $|x|<1$ не е будело възражения у съвременниците му. Днес това развитие се изучава в средното училище като "формула за сумата на безкрайна геометрична прогресия". Като се замести $x=-1$ в него, се получава равенството $\frac{1}{2} = 1-1+1-1+1-1+\cdots$

Мисълта на Ойлер, че преди да сумираме редове, трябва точно да дефинираме какво разбираме под сума на разходящ ред, е напълно в духа на съвременната теория за сумирането на разходящи редове.

Още през 15-ти век френският математик Никола Орем доказва, че хармоничният ред $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ е разходящ, като установява, че $S_{2n}-S_n > \frac{1}{2}$. През 1740 година Ойлер формулира следното достатъчно условие за разходимост на един ред: $\lim\limits_{n\to\infty} |S_{2n}-S_n| > 0$. Във връзка с хармоничния ред Ойлер доказва съществуването на границата

$$C = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \ln N\right),$$

която днес се нарича константа на Ойлер. Не е известно дали Ойлеровата константа е рационално или ирационално число.

Ойлер намира точните стойности на сумите от реципрочните стойности на четните степени на целите числа:

$$S_{2k} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}} = a_{2k}\pi^{2k}, \qquad k = 1, 2, \dots,$$

с точно определени рационални коефициенти a_{2k}. Резултатът при $k = 1$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

е решение на задача, която семейство Бернули напразно се опитвали да решат. Ойлер съобщил този резултат на Й. Бернули, който го публикувал в събраните си съчинения, без да споменава името на Ойлер.

Намирането на тази сума е решение на задача, поставена от Менголи през 1650 година. По повод на тази задача Якоб Бернули се обръща към съвременниците си: “Ако някой намери и ни съобщи това, което досега се подиграва с нашите усилия, ще му бъдем много благодарни.” Вълнуващи стъпки, чрез които Ойлер стига до своето откритие, са описани във втората глава на книгата на Д. Пойа “Математиката и правдоподобните разсъждения” [3]. Когато Ойлер вижда този свой резултат в събраните съчинения на своя учител Й. Бернули с друго доказателство, той не започва спор за приоритет, а използва метода на Бернули за получаване на знаменитата формула

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x,$$

получена преди това от Р. Коутс, но останала неизвестна на математиците. От нея при $x = \pi$ се получава зависимостта

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

между най-важните константи e, i, π и 1 в математиката. Неосъществена мечта на физиците е да получат някаква зависимост между основните физически константи.

През 1737 година Ойлер полага основите на аналитичната теория на числата, като доказва знаменитото тъждество

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \prod_{p}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}, \qquad s > 1,$$

където безкрайното произведение е по всички прости числа. Ойлер дава и ново доказателство на теоремата на Евклид за безбройността на простите числа. $\zeta(s)$ е функцията дзета, която обикновено се свързва с името на Риман, но фактически е въведена от Ойлер, който даже е стигнал до нейното функционално уравнение.

През 1735 година Ойлер публикува една малка статия за популярната тогава "Задача за Кьонигсбергските мостове". Тази статия е достъпна и за българския читател от публикацията ѝ в ученическото списание "Математика". Колкото и да е елементарна тази задача, предложеното от Ойлер решение го прави родоначалник на теорията на графите, а донякъде – и на топологията. По-късно Ойлер публикува една истинска топологична теорема – зависимостта

$$V - E + F = 2$$

между броя на върховете V, броя на ръбовете E и броя на стените F на изпъкналите многостени. По-нататъшното драматично развитие на тази теорема може да се проследи от книгата на Имре Лакатош "Доказателства и опровержения" [4].

Благодарение на дейността на Ойлер Петербургската академия на науките добива световна слава. Нещата обаче имат и обратна страна – за двореца Академията е предимно "заведение за услуги". Неотменно задължение на академиците е било да съчиняват оди за празниците, да организират фойерверки и т.н. Към 1740 година се извършват редица дворцови промени, които внасят елемент на несигурност в живота на Академията. В автобиографията си Ойлер отбелязва лаконично: "При новото регентство нещата станаха доста неблагоприятни". Това е причината Ойлер да приеме покана на пруския крал Фридрих II за организиране на нова академия в Берлин.

Берлински период (1741–1766). На 19 юни 1741 година Ойлер пристига в Берлин и остава там цели 25 години. Като пристигнал в Берлин, Ойлер бил доста сдържан и мълчалив. На въпроса на кралицата-майка защо говори толкова малко, Ойлер отговорил, че идва от страна, където бесят хората, които много говорят. Ойлер обаче не прекъснал връзките си с Петербургската академия на науките и разпределял работите си за публикуване между двете академии.

Берлинската академия на науките е основана през 1700 година от Лайбниц, който остава неин президент до 1711 година. След смъртта на Лайбниц – 1716 година Берлинската академия на науките започва да вегетира. Фридрих II се заема да я възроди. През 1743 година той назначава френския учен Пиер Мопертюи за президент на обновената академия. Ойлер става директор на математическото отделение. Първата работа, която Ойлер публикува след пристигането си в 1743 година, е методът за решаване на общото линейно диференциално уравнение с постоянни коефициенти

$$y(x) + ay'(x) + by''(x) + cy'''(x) + \cdots = 0$$

чрез субституцията $y = e^{\alpha x}$. В тази работа за пръв път се срещат формулите

$$e^x = \lim_{b\to\infty}\left(1 + \frac{x}{b}\right)^b, \quad \sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \quad \text{и} \quad \cos x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right).$$

Целият 25-годишен престой на Ойлер в Берлин е спокоен и плодотворен. Известен спад на неговата продуктивност, като количество публикувани трудове, се наблюдава в периода на бушуващата по онова време Седемгодишна война. Ойлер написва 380 статии и няколко книги. От връзките му с Русия от този период най-голямо значение има подкрепата, която той оказва на Ломоносов. Не случайно Ломоносов споделя с Ойлер в писмо най-великото си откритие – закона за запазване на масата при химични реакции. През 1745 година умира бащата на Ойлер и майка му се преселва при него в имението му Шарлотенбург (престижно предградие на Берлин).

През този период Ойлер се въвлича в два от най-известните спорове в историята на науката: дискусията за монадите на Лайбниц и дискусията за принципа на най-малкото действие в механиката, свързан главно с името на Мопертюи. В последната дискусия с памфлет се намесва и самият Волтер, който жестоко оплюва Мопертюи, а покрай него и Ойлер. Авторитетът на Ойлер не е сериозно засегнат, но Мопертюи е така съсипан, че избягва в чужбина и не се завръща до смъртта си през 1759 година. Фридрих II възлага на Ойлер да изпълнява длъжността президент на академията, но никога не го прави президент. Изглежда обида е основната причина Ойлер да замисли връщането си в Петербург.

Ще се спрем накратко на математическите постижения на Ойлер през берлинския му период. На първо място тук трябва да се спомене създаването на вариационното смятане. През 1744 година в Лозана излиза книгата на Ойлер "Метод за откриване на криви, които притежават максимално или минимално свойство, или решение на изопериметричната задача, схващана в широк смисъл". При търсене на минимума или максимума на функционала $\int_a^b L(x,y,y')dx$ Ойлер намира като необходимо условие диференциалното уравнение

$$L_y(x,y,y') - \frac{d}{dx}L_{y'}(x,y,y') = 0,$$

което днес напълно заслужено носи неговото име. Понякога се използва и терминът "уравнение на Ойлер-Лагранж". Тази книга на Ойлер заема достойно място в историята на науката и техниката и с първото поставяне на задачата за еластична устойчивост на механични системи. В нея е показано за пръв път, че такива задачи се свеждат до задачи за собствени стойности и собствени функции. Свързването на името на Ойлер с това на Лагранж в основното уравнение на вариационното смятане има своя предистория. В писмо до Ойлер в 1755 година 19-годишният Лагранж споделя своя метод за извеждане на това уравнение. Ойлер отговаря на Лагранж, че ще задържи публикуването на своята статия по този въпрос "за да не намаля по никакъв начин славата, която Ви се пада". Не е ли това ненадминат образец на научен морал!

Забележителни са откритията, които Ойлер прави през този период в теорията на числата. Колкото и странно да ни се струва от днешна гледна точка, Ойлер прави тези открития по експериментален път – чрез широко използване на налучкване, аналогия и обобщение. След като през 1742 година той доказва "малката теорема на Ферма", той не престава да размишлява върху нея. На следващата година той предлага ново доказателство на тази теорема като частен случай от по-общото твърдение: Ако цялото число a е взаимно просто с n, числото $a^{\varphi(n)} - 1$, където $\varphi(n)$ означава броя на целите числа между 1 и n, взаимно прости с n, се дели на n.

През 1742 година Ойлер в писмо до Х. Голдбах за пръв път изказва закона за реципрочност на квадратичните остатъци, след което го проверява екпериментално и накрая го доказва. Половин век по-късно Гаус следва същия път като Ойлер и дава осем различни доказателства на този основен закон на елементарната теория на числата.

Ойлер, като син на своето време, е споделял някои от предразсъдъците на своите съвременници. Например, той е вярвал, че уравненията от пета и по-висока степен могат да бъдат решени алгебрично, т.е. в радикали. Същият предразсъдък е споделял и великият му съвременник Лагранж.

В елементарната математика името на Ойлер остава свързано завинаги с така наречената права на Ойлер, минаваща през пресечната точка на височините на триъгълника, центъра на описаната окръжност и центъра на тежестта на триъгълника. Забележителна е и комбинаторната задача на Ойлер за броя на начините, по които може да се раздели един изпъкнал многоъгълник на триъгълници от диагоналите му. Ойлер намира, че за изпъкнал n-ъгълник този брой е точно $\binom{2n-4}{n-2}\frac{1}{n-1}$. Също с името на Ойлер е свързана и комбинаторната задача за разменените писма, която може да се изкаже така: Каква е вероятността при случайно раздаване на n писма, адресирани до n човека, нито един от получателите да не получи своето писмо? Тази вероятност е

$$1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}$$

и при $n \to \infty$ тя клони към $\dfrac{1}{e}$, т.е. тя е по-голяма от $\dfrac{1}{3}$ (при $n > 3$).

И все пак основните системни приноси на Ойлер към математиката са в областта на математическия анализ, или при тогавашната терминология към "инфинитезималното смятане". Голяма част от тези приноси се съдържат в неговата монументална трилогия: "Диференциално смятане" (1755), "Увод в анализа на безкрайните" (два тома – 1748) и "Интегрално смятане" (три тома – 1768-1770). Не е възможно да се изброят в нея оригиналните приноси на Ойлер, но това едва ли е необходимо, тъй като те са влезли във всички учебници по математически анализ. Все пак нужно е да се изтъкне, че той прави въведеното между другото от Лайбниц понятие функция основен обект на изследване. Във втория том на "Увод в анализа на безкрайните" се съдържа първото цялостно изложение на аналитичната геометрия на равнината и пространството. В интегралното смятане са включени различни методи за решаване на обикновени и частни диференциални уравнения, а също и ново изложение на вариационното смятане.

Втори Санкт Петербургски период (1766–1783). Ойлер е посрещнат с изключителни почести. Самата Екатерина II го приема веднага заедно със синовете му и му връчва отличия. Топлият прием донякъде смекчава огорчението от постепенната загуба на зрението му. Той намира предани сътрудници и успява през последните години на пълна слепота да напише повече от половината известни досега работи. Ойлер не прекъсва връзките си с Берлинската академия на науките. Той поздравява сърдечно Лагранж като новоизбран президент на тази академия и изразява задоволството си, че има за приемник най-добрия математик на века. Ойлер умира на 18 септември 1783 година или както казва Кондорсе в похвалното си слово за него: "Ойлер престана да живее и смята.".

ЛИТЕРАТУРА

[1] Рюдигер Тиле. Леонард Ойлер. Наука и изкуство, София, 1985.
[2] А. П. Юшкевич (ред.) История математики, т. III. Математика XVIII столетия. Наука, Москва, 1972.
[3] Дьорд Пойа. Математиката и правдоподобните разсъждения, т. I. Народна просвета, София, 1970.
[4] Имре Лакатош. Доказателства и опровержения. Наука и изкуство, София, 1983.
[5] Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука. Наука, Москва, 1988.

Иван Димовски
Институт по математика и информатика
Българска Академия на Науките
ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8
1113 София
e-mail: dimovski@math.bas.bg

Мариян Илиев
Технически университет – София
Филиал Пловдив
ул. Цанко Дюстабанов 25
4000 Пловдив
e-mail: iliev_m@abv.bg