МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2007
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2007
Proceedings of the Thirty Sixth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
St. Konstantin & Elena resort, Varna, April 2–6, 2007

# ДВЕ ОПИСАНИ КОНИЧНИ СЕЧЕНИЯ И ДВЕ ПОРОДЕНИ ОТ ТЯХ МНОЖЕСТВА ОТ ПРАВИ

**Веселин Н. Ненков**

В настоящата статия се показва как с помощта на компютърната програма "THE GEOMETER'S SKETCHPAD" се реализира евристичен подход при откриване на съдържателни твърдения в планиметрията. Този подход е приложен за обобщаване на теоремата на Симсън за триъгълника за да се разкрият някои от свойствата на описаните около триъгълник конични сечения.

Историята на математиката и физиката показва, че много резултати се получават по аналогия и чрез обобщаване на добре изучени научни факти.

Този начин за получаване на нови резултати им придава по-задълбочен смисъл, който от своя страна ги прави по-съдържателни. Това има отражение върху по-доброто разбиране и осмисляне, както на старите, така и на новите резултати. По този начин се получава не само развитие на науката, но и метод за нейното трайно усвояване. Следователно, между установените вече научни факти и тяхното трайно усвояване има пряка връзка.

Поради тези причини, в обучението може да се следва развитието на една идея, която имайки преди всичко изследователски характер, предизвиква по-голям интерес у обучаваните (даже у обучаващите) [1].

Особено интересно приложение на изследователския подход в обучението може да се постигне с използване на съвременните информационни технологии.

Използването на компютър с някоя специална програма може да бъде много ефективно и ефектно при обучението по планиметрия поради възможностите за нагледно представяне, преобразуване и изследване на разглежданите обекти.

В средата на една компютърна програма реализирането на изследователския подход може да започне от геометрична ситуация, която отразява добре известна теорема.

Основните елементи на разглежданата конфигурация се намират в някакви връзки. Едни от елементите се разглеждат като дадени, между които са зададени и известни връзки. Тези връзки пораждат други елементи като следствия на първите. Връзките между елементите-следствия характеризират твърдението на теоремата.

За да се обобщи разглежданата теорема, трябва да се изясни как могат да се изменят свойствата на дадените елементи, връзките между тях и елементите–следствия, така че да се запазят връзките между елементите–следствия или същите връзки да се променят по определен начин.

За да се разкрият възможните изменения е необходимо да се следва някаква аналогия с позната теорема. Следвайки нишката на определена аналогия, с помощта на програмата могат да се изследват различни хипотези.

Възможно е да се построи хипотеза, която да не реализира търсеното обобщение, а е възможно и няколко хипотези да дават положителен резултат.

Всичко това лесно може да се експериментира с компютър. Когато хипотезата се окаже неправилна или некоректна, при някоя промяна в параметрите се наблюдава съответно противоречие. Когато обаче не се открие случай, при който хипотезата не е вярна, това не означава, че тази хипотеза е търсеното обобщение, тъй като може да не сме да попаднали на противоречие. В този случай трябва да се проведе коректно математическо доказателство на направеното наблюдение.

Този изследователски подход за обучение може да се реализира например с програмата “THE GEOMETER’S SKETCHPAD”. Това ще покажем при обобщаването на известната теорема на Симсън от геометрията на триъгълника.

Нека $ABC$ е произволен триъгълник с описана окръжност $\Gamma$. Известно е, че ако $P$ е произволна точка от $\Gamma$, то петите на перпендикулярите спуснати от $P$ към правите $BC$, $CA$ и $AB$ лежат на една права, която се нарича *Симсънова права за точката* $P$ спрямо $\Delta ABC$ [2]. От друга страна, окръжността $\Gamma$ е само един елемент на безкрайното множество от конични сечения, описани около $\Delta ABC$. Затова е резонно да се потърси подобно свойство на точките от тези конични сечения.

В следващите редове, следвайки разсъждения по аналогия, ще покажем как с помощта на програмата “THE GEOMETER’S SKETCHPAD” може да се получи подобна права за всяко описано около$\Delta ABC$конично сечение.

Ще използваме барицентрични координати спрямо $\Delta ABC$, като $A\,(1,0,0)$, $B\,(0,1,0)$ и $C\,(0,0,1)$ [3]. Означаваме с $A_0\left(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, $B_0\left(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2}\right)$ и $C_0\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$ средите съответно на страните $BC$, $CA$ и $AB$.

Ако $O\,(x_0,y_0,z_0)\,(x_0+y_0+z_0=1)$ е произволна точка в равнината на $\Delta ABC$, нележаща на никоя от правите $BC$, $CA$ и $AB$, то точките $A$, $B$, $C$ и съответните им симетрични спрямо $O$ точки $A'\,(2x_0-1,2y_0,2z_0)$, $B'\,(2x_0,2y_0-1,2z_0)$, $C'(2x_0,$ $2y_0,2z_0-1)$ лежат на конично сечение $k\,(O)$ с център $O$ (Фиг. 1,2).

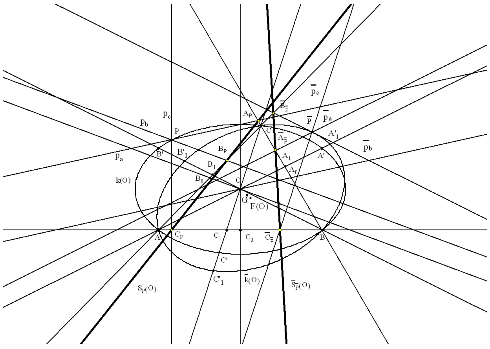
Кривата $k\,(O)$ има следното уравнение:

$$k\,(O): \quad (1-2x_0)\,x_0yz+(1-2y_0)\,y_0zx+(1-2z_0)\,z_0xy=0. \tag{1}$$

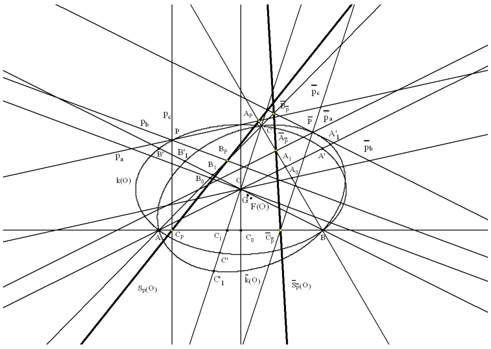
Определеното по този начин коничното сечение $k\,(O)$ е аналог на описаната окръжност $\Gamma$.

Построяваме споменатите обекти в програмата “THE GEOMETER’S SKETCHPAD”.

Нека $P\,(\lambda,\mu,\nu)$, където $\lambda+\mu+\nu=1$, е произволна точка от $k\,(O)$ и различна от върховете $A$, $B$ и $C$. Ако $k\,(O)\equiv\Gamma$, от $P$ се спускат перпендикуляри към правите $BC$, $CA$ и $AB$. Трябва да определим такива прави през $P$, че да бъдат аналози на споменатите перпендикуляри, когато $k(0)\not\equiv\Gamma$. Перпендикулярите през произволна



Фиг. 1



Фиг. 2

точка към правите $BC$, $CA$ и $AB$ са успоредни на диаметрите на $\Gamma$, минаващи през точките $A_0$, $B_0$ и $C_0$. Следователно, можем да очакваме, че правите $p_a$, $p_b$ и $p_c$ през $P$, успоредни съответно на $OA_0$, $OB_0$ и $OC_0$ са аналогични на перпендикулярите.

Да построим с програмата "THE GEOMETER'S SKETCHPAD" през произволна точка $P$ от $k(O)$ правите $p_a, p_b$ и $p_c$ успоредни съответно на $OA_0, OB_0$ и $OC_0$. След това да построим точките $A_P = p_a \cap BC, B_P = p_b \cap CA$ и $C_P = p_c \cap AB$. Накрая построяваме правата $A_P B_P$. Забелязваме, че тази права минава през $C_P$ (Фиг. 1,2). Оставяме точката $P$ да се движи по $k(O)$ и установяваме, че точките $A_P, B_P$ и $C_P$ винаги лежат на една права $S_P(O)$. Ако променим и точката $O$, променяме кривата $k(O)$, но точките $A_P, B_P$ и $C_P$ продължават да лежат на една права $S_P(O)$. По този начин установихме, че търсената аналогия наистина съществува. Тя се изразява със следната:

**Теорема 1.** *Ако $k(O)$ е произволно конично сечение с център точката $O$ и описано за $\Delta ABC$, то точката $P$ е от $k(O)$ тогава и само тогава, когато точките $A_P$, $B_P$ и $C_P$, които се получават по описания по-горе начин, лежат на една права.*

**Доказателство.** Правата $p_a$ е определена от точката $P(\lambda, \mu, \nu)$ и векторът $\overrightarrow{A_0O}\left(x_0, \dfrac{2y_0-1}{2}, \dfrac{2z_0-1}{2}\right)$. От тези условия се получават скаларно-параметричните ѝ уравнения

$$p_a : x = \lambda + x_0 t, \quad y = \mu + \frac{2y_0-1}{2}t, \quad z = \nu + \frac{2z_0-1}{2}t.$$

Правата $BC$ има уравнение $x = 0$, което комбинирано с последните уравнения води до

$$A_P\left(0, \frac{2\mu x_0 + \lambda(1-2y_0)}{2x_0}, \frac{2\nu x_0 + \lambda(1-2z_0)}{2x_0}\right).$$

Аналогично се получава, че

$$B_P\left(\frac{2\lambda y_0 + \mu(1-2x_0)}{2y_0}, 0, \frac{2\nu y_0 + \mu(1-2z_0)}{2y_0}\right) \quad \text{и}$$

$$C_P\left(\frac{2\lambda z_0 + \nu(1-2x_0)}{2z_0}, \frac{2\mu z_0 + \nu(1-2y_0)}{2z_0}, 0\right).$$

Три точки $U(x_U, y_U, z_U), V(x_V, y_V, z_V)$ и $W(x_W, y_W, z_W)$ лежат на една права тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството [3]

$$\begin{vmatrix} x_U & y_U & z_U \\ x_V & y_V & z_V \\ x_W & y_W & z_W \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Като заместим координатите на $A_P, B_P$ и $C_P$ в (2) и извършим необходимите преобразувания получаваме, че те лежат на една права тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството $\dfrac{(1-2x_0)x_0\mu\nu + (1-2y_0)y_0\nu\lambda + (1-2z_0)z_0\lambda\mu}{4x_0y_0z_0} = 0$. Като вземем предвид, че $P$ не е никой от върховете на $\Delta ABC$, от (1) се получава твърдението на теоремата.

От теорема 1 следва, че правата $S_P(O)$ е аналог на Симсънова права за точка от $\Gamma$, затова можем да я наречем *Симсънова права на точката* $P$ върху $k(O)$ спрямо $\Delta ABC$.

Нека $AO \cap BC = A_1\left(0, \dfrac{y_0}{1-x_0}, \dfrac{z_0}{1-x_0}\right)$, $BO \cap CA = B_1\left(\dfrac{x_0}{1-y_0}, 0, \dfrac{z_0}{1-y_0}\right)$, $CO \cap AB = C_1\left(\dfrac{x_0}{1-z_0}, \dfrac{y_0}{1-z_0}, 0\right)$ и $G$ е медицентърът на $\Delta ABC$. Ако $O \equiv G$, то $A_1 \equiv A_0$, $B_1 \equiv B_0$ и $C_1 \equiv C_0$. В този случай правите $p_a$, $p_b$ и $p_c$ са успоредни съответно на $AA_1, BB_1$ и $CC_1$. Затова правата $S_P(G)$ се получава не само при условията на теорема 1.

Ако $\Delta ABC$ е неравностранен и $k(O) \equiv \Gamma$, не се наблюдава получаването на права, породена от успоредността на правите $p_a, p_b$ и $p_c$ съответно с правите $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$. Следователно, ако е възможно получаване на права по този втори начин, то е свързано с друго описано за $\Delta ABC$ конично сечение $\overline{k}(O)$, което е такова, че $\overline{k}(G) \equiv k(G)$.

Коничното сечение $\overline{k}(O)$ можем да търсим, като забележим по-специално свойство на $k(G)$. Едно такова свойство е, че точките $A'$, $B'$ и $C'$ са симетрични на $G$ съответно спрямо $A_1 \equiv A_0$, $B_1 \equiv B_0$ и $C_1 \equiv C_0$. Затова нека при произволна точка $O$, точките $A_1'\left(-x_0, \dfrac{(1+x_0)y_0}{1-x_0}, \dfrac{(1+x_0)z_0}{1-x_0}\right)$, $B_1'\left(\dfrac{(1+y_0)x_0}{1-y_0}, -y_0, \dfrac{(1+y_0)z_0}{1-y_0}\right)$ и $C_1'\left(\dfrac{(1+z_0)x_0}{1-z_0}, \dfrac{(1+z_0)y_0}{1-z_0}, -z_0\right)$ са симетричните на $O$ съответно спрямо $A_1$, $B_1$ и $C_1$.

Нека с "THE GEOMETER'S SKETCHPAD" построим крива от втора степен през произволни пет от точките $A$, $B$, $C$, $A_1'$, $B_1'$ и $'C_1$. Забелязваме, че и шестте точки лежат на построената крива независимо от положението на точката $O$ и вида на $\Delta ABC$ (Фиг. 1,2).

В действителност лесно се проверява, че координатите на тези точки удовлетворяват уравнението

$$\overline{k}(O): \quad (1-x_0)x_0yz + (1-y_0)y_0zx + (1-z_0)z_0xy = 0. \tag{3}$$

Нещо повече, лесно се вижда, че $\overline{k}(O)$ има за център точката $F(O)$ $\left(\dfrac{1-x_0}{2}, \dfrac{1-y_0}{2}, \dfrac{1-z_0}{2}\right)$, която е такава, че $G$ дели насочената отсечка $\overrightarrow{OF(O)}$ в отношение 2:1. Следователно $\overline{k}(O) \equiv k(F(O))$.

Кривата $\overline{k}(O)$ ще наричаме *спрегната на* $k(O)$. От казаното до тук следва, че $k(O)$ *е самоспрегната* тогава и само тогава, когато $O \equiv G$.

Нека $\overline{P}\left(\overline{\lambda}, \overline{\mu}, \overline{\nu}\right)\left(\overline{\lambda}+\overline{\mu}+\overline{\nu}=1\right)$ е произволна различна от върховете точка и лежаща върху $\overline{k}(O)$. Сега отново с "THE GEOMETER'S SKETCHPAD" да построим правите $\overline{p}_a, \overline{p}_b$ и $\overline{p}_c$, които са успоредни съответно на правите $AA_1, BB_1$ и $CC_1$. Означаваме $\overline{A}_{\overline{P}} = \overline{p}_a \cap BC, \overline{B}_{\overline{P}} = \overline{p}_b \cap CA$ и $\overline{C}_{\overline{P}} = \overline{p}_c \cap AB$.

След като направим съответните построения забелязваме, че точките $\overline{A}_{\overline{P}}, \overline{B}_{\overline{P}}$ и $\overline{C}_{\overline{P}}$ лежат на една права $\overline{S}_{\overline{P}}(O)$ (Фиг. 1,2). Това ни дава основание да формулираме следната:

**Теорема 2.** *Ако $\overline{k}(O)$ е спрегнатата крива на конично сечение $k(O)$ с център точката $O$ и описано за $\Delta ABC$, то точката $\overline{P}$ е от $\overline{k}(O)$ тогава и само тогава, когато точките $\overline{A}_{\overline{P}}, \overline{B}_{\overline{P}}$ и $\overline{C}_{\overline{P}}$, които се получават по описания по-горе начин, лежат на една права.*

Доказателството на теорема 2 е аналогично на доказателството на теорема 1.

Проведените разсъждения показват, че идеята за обобщение на теоремата на Симсън впоследствие се доразвива, за да се получи още едно твърдение от подобен вид. Всичките тези изследвания водят до съдържателни твърдения, които отразяват по-дълбока връзка на триъгълника с описаните му конични сечения.

## ЛИТЕРАТУРА


[1] Ив. Ганчев, Ю. Колягин, Й. Кучинов, Л. Портев, Ю. Сидоров. Методика на обучението по математика VIII-XI клас, Първа част. София, 1996.

[2] Г. Паскалев. Работата в кръжока по математика, част I. Народна Просвета, София, 1984.

[3] Г. Паскалев, И. Чобанов. Забележителни точки в триъгълника. Народна Просвета, София, 1985.



Веселин Ненков Ненков
Технически колеж – Ловеч
Ул. Съйко Съев № 31
Ловеч, България
e-mail: vnenkov@mail.bg


## TWO DESCRIBED CONICS AND TWO SETS OF LINES ENGENDERED FROM THEM


**Vesselin N. Nenkov**



It is demonstrated how a heuristic approach in discovering content assertions in the plane geometry is implemented by means of the computer software "THE GEOMETER'S SKETCHPAD". This approach is applied in summarizing Simson's theorem of the triangle for revealing some of the properties of the conics described around a triangle.