МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2011
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2011
Proceedings of the Fortieth Jubilee Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 5–9, 2011

ОБОБЩЕНИЯТ АРБЕЛОС КАТО ПРИМЕРЕН ИНСТРУМЕНТАРИУМ ЗА РАЗВИВАЩО ОБУЧЕНИЕ В ЯПОНИЯ

Сава Гроздев, Масаюки Ватанабе

Статията е посветена на педагогически експеримент във водещо японско училище, който използва теорията на обобщения арбелос за формиране на знание относно понятието "коаксиално семейство" на принципа на развиващото обучение.

1. Увод. В периода 1960–1980 г. бяха положени основите на т. нар. развиващо обучение с участието на голям брой учители под ръководството на Д. Б. Елконин и В. В. Давидов. В основата на това обучение е хипотезата на Л. С. Виготски от 30-те години на миналия век, че процесите на развитието не съвпадат с процесите на обучението и че първите вървят след вторите, които създават зони на близко развитие. Зараждането на развиващото обучение става в недрата на психологическата наука във връзка с изследванията за развитието на децата (експериментите на Пиаже), за различните нива и типове мислене (Л. С. Виготски, А. Н. Леонтиев, С. Л. Рубинщайн), както и във връзка със създаването на психологическата теория за дейностите (А. Н. Леонтиев, П. Я. Галперин и др.). Основните приноси в тази област са свързани с името на световно известния руски психолог В. В. Давидов (1930–1998), който подлага на рязка критика емпиричното обобщение и поставя началото на нова теория [1]. Съгласно Давидов, приетата в традиционната форма на обучение методика с използване на нагледен материал, способства за формиране на обобщения само от емпиричен характер, при което нагледният образ не винаги е най-удачната форма за запознаване със съществените признаци на едно или друго явление. В редица случаи по-благоприятна за умственото развитие е такава организация на обучение, която е построена на теоретична основа.

2. Развиващо обучение. Ядрото на научната школа на Давидов е теорията на съдържателното обобщение и образуването на понятия. Съдържателното обобщение е търсене на зависимости и отношения в изходния материал, както и такива дейности, които пораждат многообразието на проявлението му. Под съдържателно обобщаване се разбира способността на мисълта да извежда главното, което характеризира даден предмет или явление. Мисълта, която се строи на базата на обобщения от съдържателен тип, отделя от предмета или явлението съществените начални отношения, частите и свойствата, които определят природата му. Разумът схваща мигновено – въз основа на материал от един-два случая, въз основа на решаването на една-две задачи. Но способността на мисълта може да бъде и друга. Би могло да се работи далеч не със съществените свойства и признаци на предмета или явлението. Това е вече друга мисъл, друга способност на мисълта. В първия случай способността на мисълта съответства на особеностите на теоретичното мислене, а във втория – на емпиричното. Разликата между теоретичното и емпиричното мислене в научната теория на Давидов е фундаментална.

В основата на теорията за развиващото обучение е хипотезата за водещата роля на теоретичното знание и в частност на съдържателното обобщение в развитието на интелекта. Учебната дейност се представя като познавателна и е построена на теоретико-дедуктивна основа, която се различава от емпирично-индуктивната. Реализацията на учебната дейност се осъществява във формирането на теоретично мислене. Учебният предмет не излага просто система от знания, а организира по специален начин усвояването на съдържателни обобщения – на теоретично съществените свойства и отношения на обектите, условията на техния произход и преобразуване. В тази концепция се намира понятието "субект на познанието", в което се включва способността на обучаемия да научава с помощта на научни понятия, организирани по теоретичен път, да възпроизвежда в собствената си дейност логиката на научното познание и да осъществява преход от абстрактното към конкретното. По този начин ученето се превръща в дейност за възпроизводство на съдържание, пътища и методи на научното (теоретичното) знание.

Методиката на развиващото обучение е насочена към: подаване на информация по дедуктивен път; усвояване на знания с общ и абстрактен характер, предшестващи усвояването на частни и конкретни знания, които обучаемите извеждат от общото и абстрактното; преход от абстрактното към конкретното и ориентация към основните отношения на изучавания предмет; използване на принципа на моделирането, като обучаемите възпроизвеждат изявените отношения с помощта на специални предметни, графични или буквени модели, позволяващи изучаване свйствата на обекта на знанието в чист вид. Въвеждането на едно ново понятие в процеса на развиващото обучение преминава през четири етапа: запознаване с дадена ситуация с помощта на съответна математическа задача, която е предложена от преподавателя и която е ориентирана в ситуацията; овладяване на материал, който е преобразуван така, че да изявява най-съществените отношения, служещи за решаване на предложената задача; фиксиране на изявените отношения във формата на един или друг модел; изявяване на такива свойства на фиксираните отношения, които създават условия и предагат начини за решаване на изходната частна задача. Един подходящ инструментариум за реализация на подобна методика е свързан със задачи от т. нар. Васан геометрия.

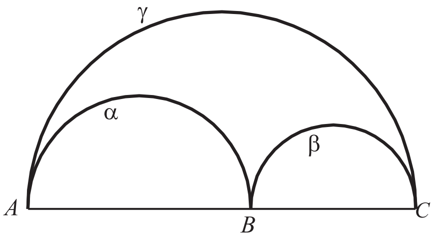
3. Историята на Васан. Летоброенето на японската математика започва от 6 век, когато китайската математика прониква за първи път в Япония най-напред през Корея, а по-късно и директно от Китай. В продължение на около 1000 години до 16 век японците изучават китайската математика и я прилагат при различни измервания, в календара, астрономията и др. Не са известни оригинални японски приноси от този период. Истинското собствено развитие на японската математика започва в края на 16 век, когато китайската математика прониква отново, но този път директно от Китай. Тази математика носи името "Васан", което на старояпонски означава японска математика. Тя се развива през периода *Едо* (1603–1867) на национална изолация и започва да западa, когато в края на този период в новата училищна система се въвежда западно-европейската математика. Въпреки че животът на Васан е кратък и трае по-малко от 300 години, развитието е бързо и постиженията са значителни.

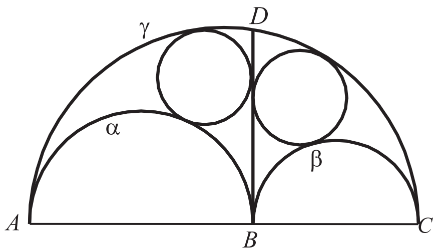
Първият известен математик с приноси във Васан е *Mïori Kanbei Shigeyoshi*, който е бил учител в гр. Киото в началото на 17 век. През 1622 г. той публикува книгата *Warizan-sho*, която се счита за най-старата достигнала до наши дни книга на Васан. В нея е изложен метод за използване на *соробан* – калкулатор, внесен от Китай малко по-рано и станал популярен впоследствие. Характерното за публикуваните след това книги е, че съдържат нерешени задачи, наричани *idai*. Решения на тези задачи били предлагани от авторите на други книги, които пък от своя страна включвали в своите произведения нови *idai*. Тази система станала особено популярна през втората половина на периода Едо и продължила да се развива до 1813 г. Тя мотивирала изучаването на математика и се счита за една от главните причини за бързия, но в същото време огромен прогрес на Васан. В теоретичен аспект позначителни резултати се отнасяли до пресмятания на числото π и на дължини на дъги от окръжност.

Едни от най-популярните математически занимания през периода Едо били свързани с геометрията. Много японци смятали, че геометрията е за забавление и точно това отношение към нея повлияло на бурното ѝ развитие през разглеждания период. Васан геометрията притежава няколко интересни характеристики, които я отличават от съвременната геометрия. Те са в основата на мотивацията за изучаването ѝ, но също и за рестриктивното ѝ систематично развитие. Първата характеристика е липсата на абстракции. Обекти на изследване били конкретни фигури в равнината и пространството, някои от които много сложни във връзка с решаването на практически задачи от земеделието. Част от задачите били свързани с различни видове на т. нар. *камон*, който представлявал семеен знак, изобразяван върху всяка къща. Знаците привличали с красотата на формите си, а скритите свойства на съответните конфигурации се превръщали в математически предизвикателства. Втората характеристика на Васан геометрията е, че всички задачи са свързани с измервания и са били решавани с алгебрични методи. Хората се интересували от пресмятания на дължини, лица и обеми, които били свеждани до системи уравнения понякога от много висока степен. В някои от случаите е проявявана изключителна изобретателност, но липсват съответни качествени резултати в теоретичен аспект. Интересът се свеждал до формулиране на конкретни задачи, намиране на решения, но не и конструиране на общи алгоритми или създаване на теории.

Модата по време на периода Едо била математическите резултати да се регистрират върху дървени плочки и да се принасят в храмовете – будистки или свързани с традиционната японска религия *шинто*. Плочка от този вид се нарича *сангаку*. Традицията в Япония била хората да изразяват благодарностите и надеждите си с рисунки на животни (най-често на коне) върху дървени плочки и да ги окачват под покрива на храмовете. Математическите сангаку са плочки в духа на тази традиция, като целта им включва и желание да се покаже съответно математическо постижение. Въпросната традиция води началото си от 1657 г. и продължава до 1868 г. Първоначално темите били алгебрични, но твърде скоро геометрията надделяла, защото интересът към нея бил масов във връзка със споменатите по-горе обстоятелства. Към днешна дата общият брой на откритите сангаку с математическо съдържание е 957, включително и реставрираните, като голяма част се считат за безвъзвратно изгубени. Някои от резултатите във Васан геометрията са еквивалентни на теореми от западно-европейската математика. Последните обаче третират свойства на определени фигури, докато при японците става дума предимно за пресмятания. Нещо повече, някои от фигурите се отъждествявали с числа, като интересът бил предимно към целите числа. Част от конфигурациите във Васан геометрията е свързана с т. нар. арбелос и архимедови окръжности.

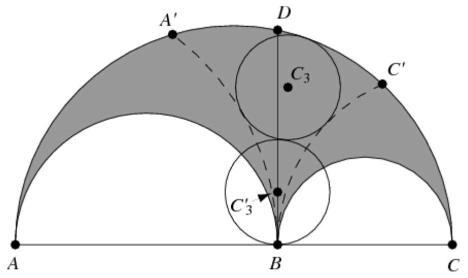
4. Арбелос и архимедови окръжности. Нека B е точка върху отсечката AC и α, β и γ са полуокръжности с диаметри съответно AB, BC и AC в една и съща полуравнина спрямо правата AC. Заградената от трите полуокръжности област се нарича "арбелос" или "обущарски нож".





Нека $BD \perp AC$ ($D \in \gamma$) е отсечка, която разделя арбелоса на две части – криволинейните триъгълници ABD и BCD, ограничени от по една отсечка и две дъги. Още на древните гърци е било известно, че вписаните окръжности в тези триъгълници са еднакви с радиус $\dfrac{AB.BC}{2(AB+BC)}$. Резултатът се приписва на Архимед и затова окръжностите се наричат "архимедови окръжности-близнаци". Окръжности със същия радиус се наричат "архимедови окръжности". Арбелосът се появява в Япония в сангаку задачи през 18 век. Във Васан геометрията са изследвани различни конфигурации на архимедови окръжности в арбелоса, т.е. окръжности, които са разположени в арбелоса и имат същия радиус както горните архимедови окръжности-близнаци. Нека например окръжността с център A и радиус AB пресича γ в точката A', а окръжността с център C и радиус CB пресича γ в точката C'. Тогава окръжността, вписана в частта от арбелоса, която е ограничена от γ и тези две окръжности, е също архимедова. На чертежа нейния център е означен с C_3. Минималната окръжност, която се допира до окръжността с център C_3 и до правата AC (центърът ѝ е означен с C_3') е също архимедова, т.е. получаваме двойка архимедови окръжности-близнаци.

В различни публикации се разглеждат архимедови и неархимедови окръжности, между които и такива, които не са близнаци. При това се изследват окръжности, които не винаги принадлежат на арбелоса, а само са свързни по определен начин с него. Самият арбелос също е обект на модификации. Когато α и β се пресичат или нямат общи точки се изследват т. нар. обобщени арбелоси, като съответните архимедови окръжности се наричат обобщени. Разнообразието е изключително голямо. Да обърнем внимание, че правата BD от чертежите по-горе е радикалната ос на окръжностите α и β. Едно семейство от окръжности е *коаксиално*, ако имат обща

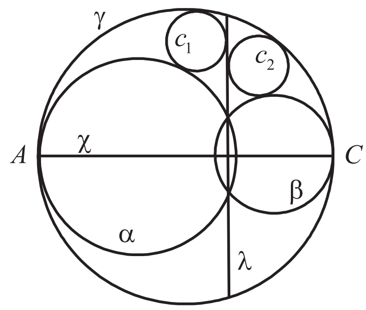


радикална ос. Нека λ е радикалната ос на една коаксиална система окръжности Φ. Центровете на всички окръжности от семейството лежат на една права, която означаваме с χ. Добре известно е, че винаги $\chi \perp \lambda$. Различават се три основни вида коаксиални семейства: когато окръжностите нямат общи точки (това са Аполониевите окръжности спрямо две различни точки и този случай се нарича неинтересен), когато окръжностите имат точно една обща точка (това е т. нар. тангентен случай) и когато всички окръжности от семейството минават през две фиксирани точки (това е т. нар. интересен случай). Нека фиксираните точки в интересния случай са L и L'. Тези точки лежат на λ. В тангентния случай окръжностите се допират в единствената обща точка, която означаваме също с L (можем да считаме, че $L' \equiv L$ в този случай). Сега $L \in \lambda$. В неинтересния случай съществуват точки $L,\ L' \in \chi$ (както беше отбелязано по-горе), които можем да считаме за окръжности (изродени) с нулеви радиуси и тези окръжности принадлежат на Φ. Отсечката с краища L и L' означаваме с I и сега радикалната ос λ е симетрала на I.

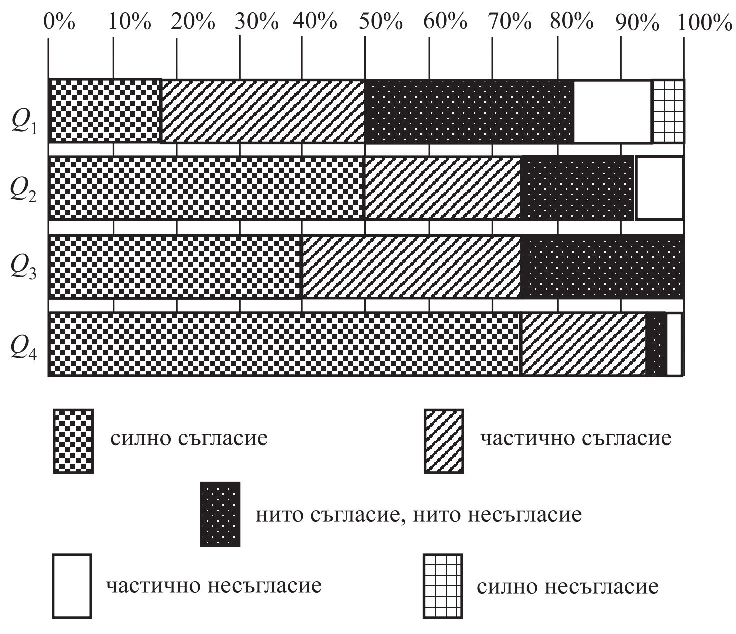
Да разгледаме координатна система, за която правата χ е абсцисна ос, а правата λ е ординатна ос. Ако точката $(x;y)$ лежи на дадена окръжност от едно коаксиално семейство Φ, то $x^2 - 2kx + y^2 + c = 0$ е уравнението на това семейство [2], където реалното число k зависи от дадената окръжност, а реалното число c се определя еднозначно от Φ. Когато $c < 0$, коаксиалното семейство е от интересен тип, при $c = 0$ то е от тангентен тип, а при $c > 0$ семейството е от неинтересен вид. Нека координатите на L и L' в интересния случай са съответно $(0;l)$ и $(0;-l)$, а в неинтересния – съответно $(l;0)$ и $(-l;0)$, като и в двата случая $l > 0$ (в тангентния случай $l = 0$). Тогава от уравнението на коаксиалното семейство следва, че $l = \sqrt{|c|}$ и заключаваме в частност, че при класическия арбелос (като граничен вариант на интересния случай) е изпълнено $c = 0$ (точката L отговаря на точката B от чертежите по-горе и е начало на координатната система).

В интересния случай, когато окръжностите α и β са пресекателни, окръжностите c_1 и c_2 са аналози на архимедовите окръжности-близнаци от класическия арбелос. От уравнението на съответното коаксиално семейство сега следва, че техният радиус е равен на $\dfrac{c - st}{2(s-t)}$, където $t < 0$ и $s > 0$ са абсцисите съответно на допирните точки A и C. Този резултат може да се изведе и директно. Обобщеният арбелос дава възможност да се приложат принципите на развиващото обучение и е подходящ инструмент за изучаване на основни понятия и методи от геометрията. Въпреки, че обектите при него са конкретни, той играе ролята на първичен модел в абстрактната математика и е в състояние да запълни празнината в училищното съдържание.

Важен аспект на подхода е, че създава условия за прилагане на типични математически методи, както и за използване на абстрактни понятия в конкретна форма, което осигурява задълбочено запознаване с тях. Става дума например за инверсия и дори формиране на знание за Мьобисова трансформация. Или например за разгледаното по-горе понятието "коаксиално семейство", което в случая се усвоява по дедуктивен път. По този начин атрактивните примери от Васан геометрията не са базови, а служат за потвърждаване и затвърждаване на теоретичното знание.



5. Заключение. Предложеният в настоящата статия подход се базира на общата теория на арбелоса, основни части от която се съдържат в [2], [3], [4] и [5]. Вторият автор на тази статия изнесе 2-часова лекция върху общата теория пред ученици от "super science" средното училище в гр. Такасаки, Япония. Училището (в Япония се обозначава с SSH) е определено от японското Министерство на образованието, културата, спорта, науката и технологията да се грижи за таланти в областта на науката и техниката. В своите програми то набляга на обучението по природо-математическите дисциплини, като използва опита на преподаватели от различни университети и изследователски институти. След приключване на лекцията беше проведена анкета със следните въпроси: Q_1 – Лесно ли разбрахте съдържанието на



лекцията?; Q_2 – Интересна ли беше лекцията?; Q_3 – Бихте ли желали да научите още неща по темата на лекцията?; Q_4 – Смятате ли, че съдържанието на лекцията е на твърде високо ниво? Резултатите от анкетата предлагаме на стр. 385.

На три пъти: през 2007 г., 2008 г. и 2009 г., беше прочетен курс върху общата теория на арбелоса пред студенти от Института по технологии в гр. Маебаши, Япония. Курсът беше съставен от 8 двучасови лекции, включващи подробни сведения за инверсията и коаксиалните семейства. С помощта на контролни беше установено, че студентите придобиват висока компетентност в използването на инверсията като инструмент за доказателство на факти, а усвояването на понятието "коаксиално семейство окръжности" им помага да възприемат геометричните обекти не само абсолютно, но също в зависимост с други обекти. Упражненията и контролните съдържаха предимно задачи от Васан геометрията. Резултатите от този педагогически експеримент са предмет на друга публикация.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Давыдов. Виды обобщения в обучении. Москва, 2005, второ издание.

[2] M. Watanabe. Circumscribed and Orthogonal Archimedean Circles In Generalized Arbelos, Proc. 6th Medconf. Math. Education, 22–26 April 2009, Plovdiv, Bulgaria, 229–238.

[3] H. Okumura, M. Watanabe. The Arbelos in n-Aliquot Parts. *For. Geom.*, **5** (2005), 37–45.

[4] H. Okumura, M. Watanabe. Generalized Arbelos in Aliquot Parts: Intersecting case., *J. Geometry Graphics*, **12** (2008), No 1, 53–62.

[5] H. Okumura, M. Watanabe. Generalized Arbelos in Aliquot Parts: Nonintersecting case. *J. Geometry Graphics*, **13** (2009), No 1, 41–57.

Сава Гроздев
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките
ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8
1113 София, България
e-mail: sava.grozdev@gmail.com

Masayuki Watanabe
Maebashi Institute of Technology
460-1 Kamisadori Maebashi
371-0816 Japan
e-mail: mwatanabe@maebashi-it.ac.jp

THE GENERALIZED ARBELOS AS AN EXAMPLE OF INSTRUMENTARIUM FOR DEVELOPING EDUCATION IN JAPAN

Sava Grozdev, Masayuki Watanabe

The paper is dedicated to a pedagogical experiment in a leading Japanese High school, applying the theory of the generalized arbelos for the formation of knowledge on the notion "coaxial family" based on the developing education principle.