МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2011
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2011
Proceedings of the Fortieth Jubilee Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 5–9, 2011

ФОРМИРАНЕ НА УЧЕНИЧЕСКИ ЕКИП ЗА РАЗРАБОТВАНЕ НА РЕФЕРАТИ

Сава Гроздев, Иванка Марашева

В настоящата работа се разглежда един конкретен пример от технологията на формиране на ученически екип за разработване на проект по математика. В процеса на формиране са разграничени следните 5 етапа: адаптация, групиране, коопериране, формиране на норми и функциониране.

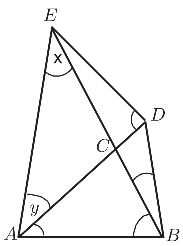
Увод. В процеса на обучение по математика важна роля играе формирането на умения и навици за творческа дейност на учениците. Работещ вариант в това направление е концепцията за рефератите. От педагогическа гледна точка рефератите се утвърдиха в обучението като многокомпонентни разработки, включващи поредици от задачи, формулиране на проблеми и на дидактически ситуации, които се свързват помежду си с различни видове творческа математическа дейност. В този смисъл рефератът е лаборатория, която поддържа среда, близка до средата за работа на професионалните математици-творци.

Когато става дума за реферати, разработвани от двама или повече ученици, естествено стигаме до понятието "екип". През последните десетилетия в производствената и организационната сфера нараства необходимостта от коопериране и сътрудничество на работното място. Във връзка с това в обществената практика и в науката значително нараства интересът към екипната дейност. Идеята за работа в екип възниква в началото на XX век. Един от първите изследователи, изучавал ефективността на работата в екип, е Е. Мейо. През 30-те години на миналия век Курт Левин изследва организационното поведение на групи от хора, което е предмет на т. нар. *групова динамика*. Съществените резултати относно екипната дейност датират едва от началото на 60-те години. През 80-те години те придобиват силен тласък на развитие. Интересът към екипната работа и изследването на нейната ефективност все повече се увеличават.

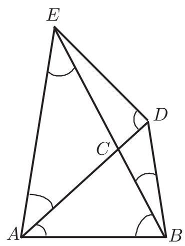
Етапи на формиране на екип. Макар и многобройни, публикациите по въпросите на екипната дейност не включват подробни разглеждания на формирането на екипи за разработване на ученически реферати. По-долу се спираме на някои детайли, свързани с реферата "Определяне на неизвестни ъгли в триъгълник", темата на който беше предложена за обсъждане в XI клас на 21 СОУ "Хр. Ботев", София. В развитието на съответния ученически екип бяха разграничени и потвърдени следните 5 етапа от [1]: адаптация, групиране, коопериране, формиране на норми и функциониране.

1. Адаптация. От гледна точка на активността този етап се характеризираше с взаимно информиране и анализ на следната конкретна задача, предложена по темата от учителя:

Задача 1. *Даден е* ΔABC *с* $\sphericalangle ABC = 60^\circ$ *и* $\sphericalangle BAC = 50^\circ$. *Върху продължение на страната* AC *е взета точка* D *(*C *е между* A *и* D*) така, че* $\sphericalangle CBD = 20^\circ$, *а върху продължение на страната* BC *е взета точка* E *(*C *е между* B *и* E*) така, че* $\sphericalangle CDE = 80^\circ$. *Да се намерят градусните мерки на* $\sphericalangle AEC = x$ *и* $\sphericalangle CAE = y$.



черт. 1



черт. 2

Адаптацията започна с дискусия относно начините за решаване на задачата. Учениците си припомниха сведения, които евентуално биха могли да имат връзка с геометричния характер на задачата и нейната формулировка. Тук влизаха най-елементарни факти като теоремите за сума от ъглите в триъгълник и четириъгълник, свойствата на връхни и съседни ъгли, свойството на външен ъгъл за даден триъгълник и т.н. Случващото се с горната задача предоставяше отлична възможност за мобилизиране на знанията на учениците относно ъгли. Обсъжданията се разшириха и за ъгли, свързани с окръжност, вписани и централни ъгли, тяхното измерване с дъги и връзката между тях, теоремата за вписан четириъгълник и др. Доста бързо учениците откриха зависимостта $x+y = 70^\circ$ (черт. 1). От този момент нататък съответната дискусия позволи да се набележи план за действие и да се постави конкретна цел за стигане до решаване на задачата. А тази цел беше естествена: да се намери още една връзка между неизвестните x и y, след което да се реши съответната система. По време на дискусията учениците се ориентираха за характера на извършените и предстоящите действия, взаимно се информираха на кого задачата се харесва и на кого – не, определяйки поведение и отношение един спрямо друг. Въпреки очевидната доброжелателност и желание за сътрудничество, на този етап резултатът за сформиране на екип беше нисък. Причината беше във все още липсващата увереност и неизвестността на предстоящото.

2. Групиране. Този етап се характеризираше с обединяване по интереси. Инструменталното съдържание в конкретния случай се състоеше в противодействията на членовете на първоначалната група ученици към изискванията, които истинската същност на задачата разкри в процеса на по-нататъшното ѝ обсъждане. Самото обсъждане продължи по-дълго време (около 2 седмици). Постепенно учениците стигнаха до извода, че използването на каквито и да е теореми за ъгли водят до един и същ резултат: $x + y = 70^\circ$. Не помогнаха и допълнителните построения, като например прекарване на успоредни прави, пренасяне на ъгли и т.н. Неуспешните опити в тази посока накараха някои от учениците да направят песимистичния извод, че задачата не може да се реши. Тези ученици загубиха интерес и се отказаха от разработване на темата. Останалите обаче запазиха мотивацията си. Те отхвърлиха първоначалните идеи и започнаха обсъждане на предложението на един от тях да се направи точен чертеж, след което да се измерят търсените ъгли с транспортир. Това беше т. нар. практическо или инженерно решение. Този подход, макар и не чисто математически, не беше за подценяване, защото той има евристичен характер

– резултатът от измерването можеше евентуално да насочи към правилно дедуктивно решение (какъвто беше конкретният случай). Резултатът от измерванията с транспортир беше $x = 40^\circ$ и $y = 30^\circ$ (черт. 2). От гледна точка на математиката този резултат трябваше да се счита за хипотеза. Основание за верността ѝ беше фактът, че измерванията не се промениха в различните случаи – всеки ученик избра различна дължина за страната AB. Проведе се дискусия и учениците взеха решение да приложат синусовата теорема за ΔACE. Получиха $\dfrac{\sin x}{\sin y} = \dfrac{AC}{CE}$. От ΔABC имаме $AC = AB\dfrac{\sin 60^\circ}{\sin 70^\circ} = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2\sin 70^\circ}$ и $BC = AB\dfrac{\sin 50^\circ}{\sin 70^\circ}$, от ΔBCD имаме $CD = BC\dfrac{\sin 20^\circ}{\sin 50^\circ} = AB\dfrac{\sin 20^\circ}{\sin 70^\circ}$, а от ΔCDE имаме съответно

$$CE = CD\frac{\sin 80^\circ}{\sin 30^\circ} = 2CD\sin 80^\circ = 2AB\frac{\sin 20^0 \sin 80^\circ}{\sin 70^\circ}.$$

Следователно $\dfrac{AC}{CE} = \dfrac{\sqrt{3}}{4\sin 20^\circ \sin 80^\circ}$, т.е. $\dfrac{\sin x}{\sin y} = \dfrac{\sqrt{3}}{4\sin 20^\circ \sin 80^\circ}$ и в отношението на синусите вече не фигурираше дължината на AB, която беше избрана за параметър.

По този начин беше намерено още едно уравнение за неизвестните x и y, като задачата като че ли ставаше решима при свеждането ѝ до система от две уравнения с две неизвестни. В този момент обаче настъпи ново разделение сред учениците в резултат на емоционалния отговор на новите изисквания към решението. Вече ставаше дума не за геометрия, а за тригонометрия и при това с допълнителна трудност, защото само едното уравнение в системата беше тригонометрично. Учениците се разделиха на групи и се появиха първите междугрупови норми. Личната мотивация надделя и желанието за работа по реферата остана само у трима ученика. Те се обединиха около единия от тях, който съобщи, че има предвид подходяща литература относно получената необичайна система.

3. Коопериране. По време на този етап се осъзна желанието за работа над решението на задачата. Характерно стана по-откритото и конструктивно общуване, появи се екипна солидарност и сплотеност. За първи път различните “аз” отстъпиха място на “ние”. Водеща стана инструменталната дейност и се разви организационното единство. Все още обаче липсваха психологически връзки. Информацията за конкретен литературен източник по повод на необичайната система се обогати с нови референции, които учениците установиха самостоятелно. Започна обмен на няколко сборника и списания. Участниците в екипа си размениха няколко решени примера по темата. Постепенно те стигнаха до по-удачната преформулировка на системата: $x + y = 70^\circ$ и $\operatorname{tg}\dfrac{x-y}{2} = \dfrac{k-1}{k+1}\operatorname{tg}\dfrac{x+y}{2}$. Второто равенство следва от $\dfrac{\sin x}{\sin y} = k \left(k = \dfrac{\sqrt{3}}{4\sin 20^\circ \sin 80^\circ}\right)$ по следния начин:

$$\frac{k-1}{k+1} = \frac{\dfrac{\sin x}{\sin y} - 1}{\dfrac{\sin x}{\sin y} + 1} = \frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{2\sin\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}}{2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{x-y}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{x+y}{2}}.$$

Първоначалната система беше извън учебния материал в училище и това даде възможност на учениците да стигнат сами до горния подход за решаването ѝ. Интересното е, че подобни системи се срещат в задачи от геодезията (подсказано от учителя) и това задълбочи познанията. Беше реализиран един от най-важните елементи на научната работа – самостоятелно запознаване с математическа литература и проверка на придобита информация върху конкретна проблематика. На този етап учениците проведоха дискусия относно завършващите действия по отношение решаването на системата. Те забелязаха, че стойностите на тригонометричните функции във второто уравнение са ирационални числа. Заключението беше, че трябва да се ползва калкулатор или логаритмична таблица. Получено беше следното приближено решение: $x = 39°57'53''$ и $y = 30°2'7''$.

4. Формиране на норми. Тук взаимодействието между членовете на екипа се задълбочи и се установиха принципи на това взаимодействие. Доминираща сфера стана емоционалната активност, рязко нарастна отношението "аз – ти" и личните отношения се стесниха. Екипът се сплоти, компетентността му се увеличи, а единността в организационно и психологическо отношение го превърна в автономна и затворена единица. Универсалният синергетичен механизъм осъществи самоорганизация и обедини индивидуалностите [2]. Комуникирайки помежду си, учениците постепенно осъзнаха значимостта на онова, с което се занимаваха. Всеки от тях все по-ясно виждаше привлекателните страни на темата, над която работеше. На този етап творческата активност достигна своя максимум и се осъществи резултатна реализация на търсенията.

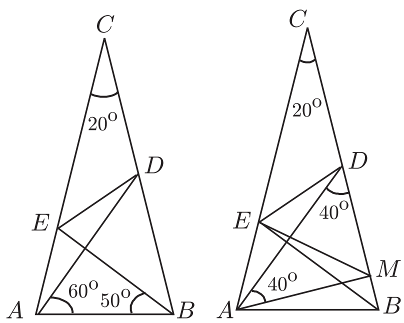
Първият въпрос, който си зададоха учениците, беше свързан с вида на полученото решение. Породи се съмнение дали е нормално в отговора да фигурират минути и секунди, след като данните в условието на задачата съдържат цяло число градуси. Много бързо беше осъзнато, че видът на решението не е в противоречие с данните. Въпреки това липсваше удовлетворение. Причината беше, че първоначалната хипотеза $x = 40°$ и $y = 30°$ не се потвърждаваше и това пораждаше безпокойство. Мотивацията за продължаване на изследванията получи нова сила. След няколко дни се появи идея – да се докаже равенството на ъглите с помощта на подобни триъгълници. Триъгълниците ADE и CDE имат общ ъгъл $80°$. Освен това $\sphericalangle CED = 30°$ и ако наистина $y = 30°$, то тогава $\Delta ADE \sim \Delta EDC$. Обратно, ако $\Delta ADE \sim \Delta EDC$, то $y = 30°$. Следователно, достатъчно беше да се докаже въпросното подобие. Наличието на общ ъгъл на разглежданите триъгълници насочи учениците към I признак за подобие. Те формулираха и новата хипотеза: $\dfrac{AD}{DE} = \dfrac{DE}{DC}$. Досегашните пресмятания се оказаха полезни. Беше получено $DC = AB\dfrac{\sin 20°}{\sin 70°}$ и оставаше да се съобрази, че $DE = DC\dfrac{\sin 70°}{\sin 30°} = 2DC\sin 70° = 2AB\sin 20°$ и $AD = AB\dfrac{\sin 80°}{\sin 50°}$ (от синусовата теорема за ΔABD). Тогава равенството $\dfrac{AD}{DE} = \dfrac{DE}{DC}$ е еквивалентно с $\dfrac{\sin 80°}{\sin 50°} \cdot \dfrac{\sin 20°}{\sin 70°} = 4\sin^2 20°$. Последното следва лесно, като се използва, че

$$\sin 80°0 = 2\sin 40°\cos 40° = 4\sin 20°\cos 20°\cos 40° = 4\sin 20°\sin 70°\sin 50°.$$

По този начин първоначалната хипотеза беше напълно потвърдена. Един поглед назад показва, че решителни за крайния успех бяха не само готовите знания за факти и твърдения, а конкретната математическа дейност, включваща и евристичната роля на прякото измерване на ъглите x и y върху точен чертеж, което доведе до откриване на хипотезата. Потвърди се, че водещи в съвременната дидактика на математиката са активната рефлексия и синергетиката, които инспирират поставянето на въпроси и тяхното решаване както в конкретния случай. В този смисъл технологията се оказа близка до идеите на Д. Пойя [3].

5. Функциониране. На този етап екипът притежаваше високо ниво на подготвеност и психологическа зрелост. Той се отвори за вземането на нови решения и конструктивни действия. Въпреки наличието на специфика, ефективността му можеше да се оцени чрез общоприети критерии – целеустременост, инициативност и творчески подход. Не без значение беше и придобитата в процеса на търсенията производителност. Взаимната ангажираност се превърна в привързаност и отдаденост към работния процес. Настъпи промяна в речника и изразните средства. Усвоената терминология беше последвана от осмисляне на съдържанието. Напредъкът в развитието на проекта караше членовете на екипа да се радват и да се гордеят с постигнатото. В проучването на литература учениците попаднаха на задача, данните в която неочаквано приличаха на данните в първоначално поставената. Ето тази задача:

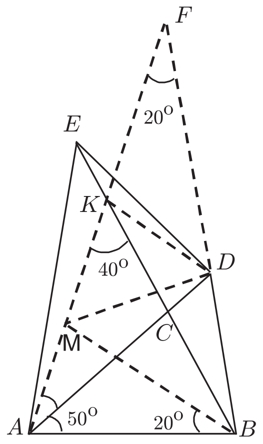
Задача 2. *Даден е равнобедрен* ΔABC *(*$AC = BC$*) с* $\sphericalangle ACB = 20^\circ$*. Ако* D *е точка върху бедрото* BC *така, че* $\sphericalangle BAD = 60^\circ$*, а* E *е точка върху бедрото* AC *така, че* $\sphericalangle ABE = 50^\circ$*, да се намери градусната мярка на* $\sphericalangle EDA$*.*



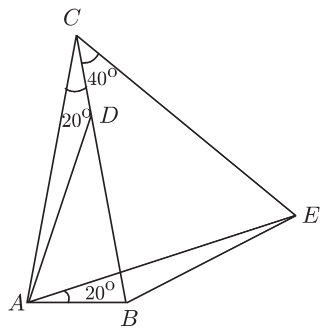
черт. 3 черт. 4

Решение. Най-напред да забележим, че $\sphericalangle AEB = 50^\circ$, откъдето следва, че ΔBEA е равнобедрен и $AB = AE$ (черт. 3). Нека M е такава точка върху бедрото BC, че $\sphericalangle BAM = 20^\circ$. Тогава ΔMBA е равнобедрен и $AM = AB$ (черт. 4). Но тогава и ΔAME е равнобедрен ($AM = AE$). От друга страна $\sphericalangle EAM = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$ и заключаваме, че ΔAME е равностранен. Тогава $\sphericalangle AME = 60^\circ$, откъдето пресмятаме, че $\sphericalangle EMD = 40^\circ$. Имаме още, че $\sphericalangle MAD = 40^\circ$ и $\sphericalangle ADM = 40^\circ$. Това означава, че $MD = AM$, а следователно $MD = ME$. Тогава ΔDEM е равнобедрен и $\sphericalangle EDM = \dfrac{1}{2}(180^\circ - 40^\circ) = 70^\circ$. Затова $\sphericalangle EDA = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ$.

Участниците в екипа самостоятелно откриха, че задача 2 може да се използва за решаването на задача 1. Ето как: Без ограничение допускаме, че $y > 30^\circ$ (допускането $y < 30^\circ$ се разглежда аналогично) и нека точка F е такава, че заедно с D е в една и съща полуравнина спрямо AB (черт. 5). Освен това нека $\sphericalangle DAF = 30^\circ$ и $AF \times BE = K$. Тогава $\sphericalangle AFB = 20^\circ$ и ΔABF е равнобедрен ($AF = BF$), т.е. имаме ситуацията от задача 2 (всъщност тя е симетрична спрямо симетралата на отсечката AB). Сега постъпваме както в решението на задача 2. Нека $M \in AF$ е такава, че $\sphericalangle ABM = 20^\circ$. Тогава ΔMBD е равностранен и, следователно, $\sphericalangle KMD = 40^\circ$. Освен това $\sphericalangle AKB = \sphericalangle MBK = 40^\circ$, т.е. ΔMBK е равнобедрен. Но тогава и ΔMDK е рав



черт. 5



черт. 6

нобедрен, откъдето заключаваме, че $\sphericalangle MKD = 70^\circ$. Излиза, че $\sphericalangle BKD = 30^\circ$, което е невъзможно, защото $\sphericalangle BKD$ е външен за ΔKDE и $\sphericalangle BKD > \sphericalangle BED$ (съгласно условието на задача 1 $\sphericalangle BED = 30^\circ$).

Полученият резултат оформи окончателното съдържание на реферата – да се включат само задачи за намиране на ъгли, които могат да се решават с материал за седмокласници. Учениците откриха много примери и рефератът стана достатъчно богат. Тук предлагаме една такава задача.

Задача 3. Даден е равнобедрен ΔABC $(AC = BC)$ с $\sphericalangle ACB = 20^\circ$. Ако D е точка върху бедрото BC така, че $CD = AB$, да се намери градусната мярка на $\sphericalangle BAD$.

Решение. Нека точката E в равнината на триъгълника е такава, че $\sphericalangle BAE = 20^\circ$ и $\sphericalangle BCE = 40^\circ$ (черт. 6). Тогава $\sphericalangle ACE = 60^\circ$ и $\sphericalangle EAC = \sphericalangle BAC - \sphericalangle BAE = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$. Заключаваме, че ΔAEC е равностранен и следователно $AE = AC$. Тогава триъгълниците ACD и EAB са еднакви по I признак. От друга страна ΔBEC е равнобедрен $(BC = EC)$, откъдето $\sphericalangle CEB = \dfrac{1}{2}(180^\circ - 40^\circ) = 70^\circ$. Имаме

$$\sphericalangle CAD = \sphericalangle AEB = \sphericalangle CEB - \sphericalangle CEA = 70^\circ - 60^\circ = 10^\circ.$$

Следователно $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BAC - \sphericalangle CAD = 80^\circ - 10^\circ = 70^\circ$.

Заключение. Съществени за доброто функциониране на екипа се оказаха вътрешната и външната среда, всяка от които представлява интеграция от няколко елемента [4]. Вътрешната среда включваше мотивацията и формираната съпричастност към екипната цел. Появи се доверие между учениците и убеждение, че всеки можеше и трябваше да бъде полезен. В резултат на автономията по естествен начин се създаде яснота относно правилата и нормите на действие. Колективните решения породиха ангажираност и работоспособност. Водеща във външната среда беше подкрепата и съветите на учителя по математика, които улесняваха и благоприятстваха ефективността. Предразполагащо беше и отношението на учителите по другите предмети, а така също и на ръководството на 21 СОУ "Хр. Ботев". Огромна беше ролята и на родителите. Със своето одобрение и положителна оценка те се превърнаха в сериозен стимулиращ фактор. Много родители осъзнават значението на работата по проекти. В училището бяха анкетирани 45 родители: 98% от тях приемат тази дейност за полезна и само 2% считат, че учениците са твърде натоварени в училище и проектната работа им идва в повече; 80% са убедени, че с разработването на проекти децата им получават повече знания.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Ципес, А. Товб. Смешать, но не взбалтывать... или Организационные структуры в проектах. Наука, Киев, 2002.

[2] S. Grozdev. For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice). ADE, Sofia, 2007.

[3] G. Polya. Mathematical Discovery. On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving. John Wiley&Sons Inc., New York – London, v. 1 – 1962, v. 2 – 1965.

[4] Т. Христова, Т. Христов, С. Христов. Десетте златни правила за работа в екип. Сиела, София, 2006.

Сава Гроздев
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките
ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8
1113 София
e-mail: sava.grozdev@gmail.com

Иванка Марашева
ул. Кораб планина, ет. 2, ап. 6
1164 София
e-mail: marasheva@abv.bg

FORMATION OF HIGH SCHOOL STUDENTS' TEAM FOR THE ELABORATION OF PROJECTS

Sava Grozdev, Ivanka Marasheva

The present paper considers a particular example of the technology for the formation of high school students' team for the elaboration of projects in Mathematics. The following 5 stages are distinguished in the process of formation: adaptation, grouping, cooperation, formation of norms and functioning.