МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2011
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2011
Proceedings of the Fortieth Jubilee Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 5–9, 2011

ЕДНО СВОЙСТВО НА ЦЕНТРАЛНИ КОНИЧНИ СЕЧЕНИЯ, АСОЦИИРАНИ СПРЯМО ТРИЪГЪЛНИК

Сава Гроздев, Веселин Ненков

Показано е как с помощта на компютърната програма "THE GEOMETER'S SKETCHPAD" се получава обобщение на една задача от Международната олимпиада по математика през 2010 г.

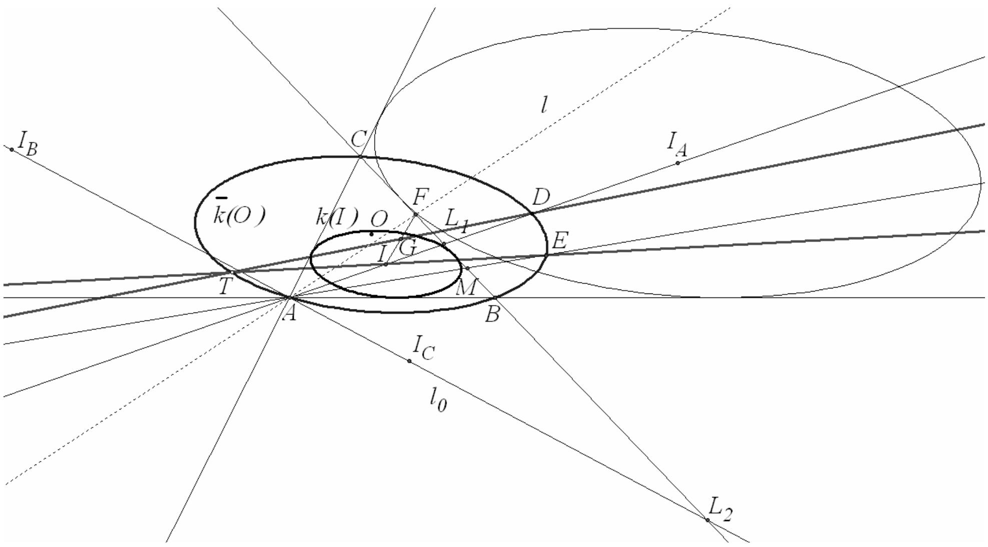
Естествен стремеж на всеки изследовател е да формулира и докаже във възможно най-обща форма своите твърдения или да обобщи твърденията на други автори. Различните форми на обобщаване са разгледани подробно в [1] и обединяващото в тях е разбирането на обобщението като мислено обединяване на предмети и явления по техни съществени признаци. При най-простите обобщения обединението е въз основа на отделни случайни признаци, при по-сложните се държи сметка на основанията за обединението, а при най-сложните се осъществява извеждане на видови и родови признаци и съответният обобщаван обект се включва в система от понятия. Във всички случаи е необходимо добро познаване и проследяване на свойства и връзки, придружени с изобретателност и активно включване на едни от най-важните мисловни операции, каквито са анализът и синтезът. Твърде често проследяването, анализирането и синтезирането са съпроводени с технически трудности и невъзможността за тяхното преодоляване води до неуспех. Една печеливша възможност е свързана с използването на информационни технологии.

В редица случаи, особено при геометрични задачи, препятствията при откриването на необходимите връзки с цел обобщение могат да бъдат отстранени с помощта на конструктивните и динамичните инструменти на програмата "THE GEOMETER'S SKETCHPAD" (GSP). Ще покажем как с помощта на GSP може да се обобщи една геометрична задача от Международната олимпиада по математика през 2010 г. Тази задача се отнася до произволен триъгълник и затова във връзка с доказателствата по-долу ще използваме барицентрични координати спрямо координатен $\triangle ABC$, като $A\,(1,0,0)$, $B\,(0,1,0)$ и $C\,(0,0,1)$ [2]. Освен това с $A_0\left(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, $B_0\left(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2}\right)$ и $C_0\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$ ще означим средите съответно на страните BC, CA и AB на триъгълника. Задачата, на която търсим обобщение, е следната:

Нека I е центърът на вписаната окръжност в $\Delta ABC, \Gamma$ е неговата описана окръжност. Правата AI пресича Γ в точка D. Точка E от дъгата BCD и точка

F от страната BC са такива, че $\sphericalangle BAF = \sphericalangle CAE < \dfrac{1}{2}\sphericalangle BAC$. Нека G е средата на отсечката IF. Да се докаже, че правите DG и EI се пресичат върху Γ [3].

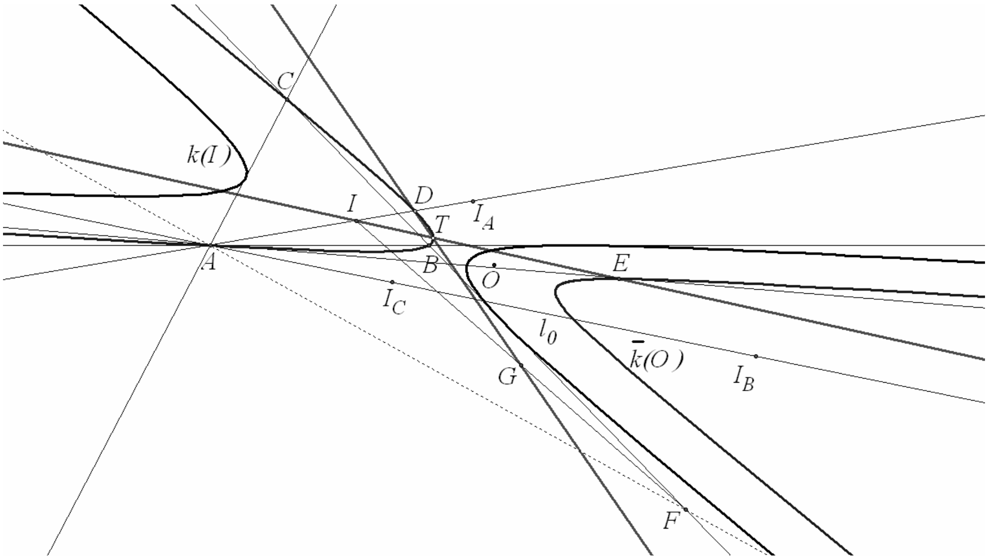
В условието на задачата участват две специални за ΔABC окръжности. Една възможност за обобщение е тези окръжности да се заменят с подходящи централни конични сечения (елипси и хиперболи). По аналогия коничните сечения би трябвало да са свързани помежду си така, както вписаната и описаната окръжност спрямо ΔABC. Основаната трудност се състои именно в това да се открие клас двойки от вписани и описани криви за ΔABC, които по отношение на триъгълника имат свойства, подобни на съответните окръжности.



Фиг. 1

Произволна точка $I\,(x_I, y_I, z_I)$ $(x_I + y_I + z_I = 1)$, която не лежи върху никоя от правите BC, CA, AB, B_0C_0, C_0A_0 и A_0B_0, е център на вписано за ΔABC конично сечение $k\,(I)$ [4]. Точките $I_A\left(-\dfrac{x_I}{1-2x_I}, \dfrac{y_I}{1-2x_I}, \dfrac{z_I}{1-2x_I}\right)$, $I_B\left(\dfrac{x_I}{1-2y_I}, -\dfrac{y_I}{1-2y_I}, \dfrac{z_I}{1-2y_I}\right)$ и $I_C\left(\dfrac{x_I}{1-2z_I}, \dfrac{y_I}{1-2z_I}, -\dfrac{z_I}{1-2z_I}\right)$ определят $\Delta I_AI_BI_C$, който се нарича спрегнат на I спрямо ΔABC [2, с. 67]. Средите на отсечките на II_A, II_B, II_C, I_BI_C, I_CI_A и I_AI_B, както е показано в [4], лежат на конично сечение $\bar{k}\,(O)$ с център точка O. Всяка от точките I и O определя еднозначно другата [5], затова е естествено да определим кривите $\bar{k}\,(O)$ и $k\,(I)$ като *асоциирани* спрямо ΔABC. В [4] и [5] е показано, че кривите $k\,(I)$ и $\bar{k}\,(O)$ притежават свойства, които са подобни на съответните свойства на вписаната и описаната окръжност за ΔABC. Затова можем да смятаме, че търсените класове се състоят от двойки асоциирани спрямо триъгълника криви.

Равенството $\sphericalangle BAF = \sphericalangle CAE$ в олимпиадната задача може да се тълкува като симетрия на правите AE и AF спрямо AI. Нека сега E е точка от $\bar{k}\,(O)$, а $F \in CA$ така, че правите AE и AF са симетрични спрямо AI (I е центърът на асоциирана-



Фиг. 2

та крива $k\,(I)$). Експериментите с GSP показват обаче, че правите DG и EI не се пресичат върху $\bar{k}\,(O)$. Равенството $\measuredangle BAF = \measuredangle CAE$ в задачата означава и това, че правите AE и AF са хармонично спрегнати спрямо правите AI и I_BI_C. Експериментите с GSP този път водят до хипотезата, че правите DG и EI се пресичат върху $\bar{k}\,(O)$. Така формулираме следното

Твърдение. *Нека $\bar{k}\,(O)$ и $k\,(I)$ са асоциирани описана и вписана крива спрямо ΔABC. Нека правата AI пресича $\bar{k}\,(O)$ за втори път в точка D, правата l_0 е хармонично спрегната на AI спрямо AB и AC, а E е произволна точка от $\bar{k}\,(O)$. Ако правата l, която е хармонично спрегната на AE спрямо AI и l_0 пресича правата BC в точка F, а G е средата на IF, то правите DG и EI се пресичат върху $\bar{k}\,(O)$ (Фиг. 1, 2).*

Нека $AI \cap BC = L_1\left(0, \dfrac{y_I}{1-x_I}, \dfrac{z_I}{1-x_I}\right)$, $l_0 \equiv I_BI_C \cap BC = L_2\left(0, \dfrac{y_I}{y_I - z_I}, \dfrac{z_I}{z_I - y_I}\right)$, $AE \cap BC = M\,(0, m, 1-m)$ и $l \cap BC = F\,(0, f, 1-f)$ (Фиг. 1, 2). От хармоничността следва, че са изпълнени равенствата $s = \dfrac{\overline{L_1F}}{\overline{L_2F}} = -\dfrac{\overline{L_1M}}{\overline{L_2M}}$, затова $\overrightarrow{OF} = \dfrac{\overrightarrow{OL_1} - s.\overrightarrow{OL_2}}{1-s}$ и $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OL_1} + s.\overrightarrow{OL_2}}{1+s}$. Първото от тези равенства води до $s = \dfrac{y_I - z_I}{y_I + z_I}.\dfrac{(y_I + z_I)\,f - y_I}{(y_I - z_I)\,f - y_I}$, от което заедно с второто определяме равенството

$$m = \frac{y_I^2\,(f-1)}{(y_I^2 - z_I^2)\,f - y_I^2}. \tag{1}$$

Тъй като според [4] точката $D\left(-\dfrac{x_I^2}{1-2x_I}, \dfrac{(1-x_I)\,y_I}{1-2x_I}, \dfrac{(1-x_I)\,z_I}{1-2x_I}\right)$ е среда на отсечката II_A, то DG е средна отсечка за $\Delta I_A F A$ и затова правата DG е определена от точката D и вектор, колинеарен с FI_A. Така получаваме, че правата DG се определя с уравненията

$$(2)\qquad DG: \begin{aligned} x &= -\frac{x_I^2}{1-2x_I} - x_I\, t,\\ y &= \frac{(1-x_I)\, y_I}{1-2x_I} + \left[y_I - (1-2x_I)\, f\right] t,\\ z &= \frac{(1-x_I)\, z_I}{1-2x_I} + \left[x_I - y_I + (1-2x_I)\, f\right] t. \end{aligned}$$

Освен това от резултатите в [4] следва, че $\bar{k}\,(O)$ се представя с уравнението

$$(3)\qquad \bar{k}\,(O): x_I^2 yz + y_I^2 zx + z_I^2 xy = 0.$$

От (2) и (3) след известни пресмятания, за координатите на втората пресечна точка T на DG и $\bar{k}\,(O)$ се получават равенствата

$$(4)\qquad \begin{aligned} x_T &= \left(-x_I^2 f^2 + x_I\,(1-2y_I)\, f + y_I\,(1-y_I)\right).\frac{x_I}{\tau_1},\\ y_T &= \left(x_I\,(1-x_I)\, f^2 + y_I\,(1-2x_I)\, f - y_I^2\right).\frac{y_I}{\tau_1},\\ &]\\ z_T &= \left(x_I\,(1-x_I)\, f^2 - (z_I + 2x_I y_I)\, f + y_I\,(1-y_I)\right).\frac{z_I}{\tau_1}, \end{aligned}$$

където $\tau_1 = x_I\,(1-2x_I)\, f^2 - (1-2x_I)\,(1-2y_I)\, f + y_I\,(1-2y_I)$.

От уравненията на правата AM и кривата на $\bar{k}\,(O)$ определяме координатите на втората им пресечна точка E, в които заместваме равенството (1) и окончателно получаваме

$$(5)\qquad x_E = -\frac{f\,(f-1)\, x_I^2}{\tau_2}, y_E = \frac{(f-1)\, y_I^2}{\tau_2}, z_E = -\frac{f z_I^2}{\tau_2},$$

където $\tau_2 = -x_I^2 f^2 + \left(x_I^2 + y_I^2 - z_I^2\right) f - y_I^2$.

Сега да отбележим, че точките $M_1\,(x_1, y_1, z_1)$, $M_2\,(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3\,(x_3, y_3, z_3)$ лежат на една права точно когато е изпълнено равенството

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ [2, с. 61].}$$

Като се използват равенствата (4) и (5), лесно се проверява, че координатите на точките I, T и E удовлетворяват (6). Следователно точката T лежи на правата IE.

За пълното доказателство на твърдението трябва да се разгледат още три случая:

1) $AE \| BC$; 2) DG е успоредна на асимптота на $\bar{k}\,(O)$, т.е. T е безкрайна точка за $\bar{k}\,(O)$; 3) IE е успоредна на асимптота на $\bar{k}\,(O)$, т.е. E е безкрайна точка за $\bar{k}\,(O)$.

Ще разгледаме всеки от тези случаи поотделно.

1) Нека $AE \| BC$. Тогава F е среда на $L_1 L_2$ и $f = \dfrac{y_I^2}{y_I^2 - z_I^2}$, а точката E има координати $x_E = 1$, $y_E = \dfrac{z_I^2 - y_I^2}{x_I^2}$, $z_E = \dfrac{y_I^2 - z_I^2}{x_I^2}$. Тези координати могат да се

получат от (5) при $\tau_2 = -\left(\dfrac{x_I y_I z_I}{y_I^2 - z_I^2}\right)^2$, затова с равенствата (5) се описват всички крайни точки от $\bar{k}\,(O)$. Следователно проведеното по-горе доказателство, че T лежи на IE, се пренася и върху този специален случай.

Случаите 2) и 3) имат смисъл само когато $\bar{k}\,(O)$ е хипербола. Ако $\bar{k}\,(O)$ е хипербола, случаите 2) и 3) се получават съответно при $\tau_1 = 0$ и $\tau_2 = 0$. Преди да докажем, че твърдението е в сила и при тези случаи, трябва да отбележим, че с несложни пресмятания може да се покаже невъзможността на равенствата $\tau_1 = \tau_2 = 0$. Освен това е изпълнено равенството

$$\tau_2 = \tau_1 - x_I\,(1 - x_I)\,f^2 + 2x_I y_I f - y_I\,(1 - y_I)\,. \tag{7}$$

2) Нека $\tau_1 = 0$. От това равенство и (2) се вижда, че векторът $\overrightarrow{u}\left(1 - 2y_I, (1 - 2x_I)\,f^2, (2x - 1)\,f^2 + 2y_I - 1\right)$ е колинеарен с правата DG. Освен това от координатите на точката E с помощта на (7) се получава, че правата IE също е колинеарна с $\overrightarrow{u}$.

3) Нека $\tau_2 = 0$. От това равенство и координатите на T с помощта на (7) се получава, че векторът $\overrightarrow{v}\left(x_I^2 f\,(1 - f)\,, y_I^2\,(f - 1)\,, -z_I^2 f\right)$ е колинеарен с правата IT. След заместване установяваме, че координатите на $\overrightarrow{v}$ удовлетворяват (3). Следователно той е колинеарен с асимптота на $\bar{k}\,(O)$.

С това твърдението е напълно доказано.

В заключение може да се каже, че доказаното твърдение изразява едно свойство на определените като асоциирани спрямо даден триъгълник централни конични сечения. Възможността за откриване на това свойство се дължи на връзката между проективните свойства на коничните сечения и хармоничните снопове от прави, породени във върховете на произволен триъгълник.

ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Smaling. Inductive, Analogical and Communicative Generalization. *International Journal of Qualitative Methods*, **2** (2003), No 1, 1–31.

[2] Г. Паскалев, И. Чобанов. Забележителни точки в триъгълника. Народна просвета, София, 1985.

[3] С. Гроздев. Напредване назад. *Математика плюс*, № 3 (71), (2010), 46–50.

[4] В. Ненков. Обобщение на теоремата на Фойербах. *Математика и информатика*, № 2, (2008), 35–42.

[5] В. Ненков. Няколко свойства на Фойербаховата конфигурация. *Математика и информатика*, № 5, (2010), 42–61.

Сава Иванов Гроздев
Институт по математика и информатика
ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8
1113 София
e-mail: sava.grozdev@gmail.com

Веселин Ненков Ненков
Технически колеж Ловеч
ул. Съйко Съев № 31
Ловеч
e-mail: vnenkov@mail.bg

A PROPERTY OF CENTRAL CONICS, ASSOCIATED WITH RESPECT TO A TRIANGLE

Sava Grozdev, Veselin Nenkov

It is shown the possibility to obtain a generalization of a problem from the International Mathematical Olympiad in 2010 by means of "THE GEOMETER'S SKETCHPAD" programme.