МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2011
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2011
Proceedings of the Fortieth Jubilee Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 5–9, 2011

ДИНАМИЧНИЯТ СОФТУЕР ПРИ РЕШАВАНЕ НА ЕДИН КЛАС УРАВНЕНИЯ, СЪДЪРЖАЩИ АБСОЛЮТНА СТОЙНОСТ

Катя Чалъкова, Светлозар Дойчев

В статията се разглежда едно приложение на динамичния софтуер GeoGebra. при обучението на ученици от 11 клас по темата "Уравнения, съдържащи абсолютна стойност" в часовете по СИП. Изследва се определен клас от модулни уравнения и се доказват резултати за броя на техните корени.

Традиционното обучение само до известна степен осигурява реализирането на принципите на дидактиката. Съвременното развитие на технологиите поставя обучението по математика в нови реалности. Откриват се възможности за използване на изследователския подход при решаване на задачи. Динамичният софтуер намира широко приложение при реализиране на основните дейности в хода на обучението. Приложението на информационните и комуникационни технологии при решаване на задачи с графики на функции създава условия за формулиране на хипотези, за доказателство на получените резултати и като цяло – разглеждане на учебния процес като процес на управление, създава нови възможности за повишаване на ефективността на обучението по математика.

"При изучаване на функциите с елементарни средства, освен табличното им представяне, се извършва и построяване на графики по точки. Тази дейност е свързана с извършване на много индуктивни умозаключения" [1]. Използването на компютъра в процеса на изучаване на функции и особено използването на различни софтуерни продукти при построяването на графика на функции създава възможности за задълбочено изследване на свойствата на самите функции. Нагледността и точният чертеж на графиката е предпоставка за откриване на връзката между графиката на функцията и решаването на уравнения. Доказателство за това твърдение е темата "Квадратна функция" и решаването на уравнения, с връзка между модулна и квадратна функция.

Предимствата, които дава динамичният софтуер при решаване на този клас задачи са:

- синтез на знанията за графика на линейна функция, зададена с модул;
- откриване на всички свойства на функцията чрез разглеждане на динамична конструкция;
- затвърждаване на знанията за свойствата на квадратната функция;
- нагледна доказателственост на получените резултати;
- прилагане на графичния подход при решаване на уравнения.

"Действителният процес на обучението на ученика от учителя се състои от определена последователност на "педагогически дейности", с помощта на които учителят решава определени педагогически задачи" [2]. В настоящата статия се разглеждат две групи задачи: чрез които се представя на учениците необходимостта от разглеждане на връзката между квадратна функция и линейна функция, зададена с модул. Чрез трите мотивиращи задачи се прави въвеждане в темата и се представя динамичната конструкция, чрез използване на програмния продукт GeoGebra. Тази конструкция се използва като основа за решаване на задачи по темата.

Предварителни задачи (задачи за "мотивация")

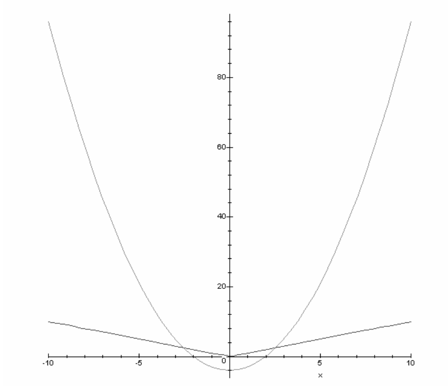
Задача А. Да се реши уравнението $x^2 + x = |x+1|$ (ХТМУ, 2007г.)

Отговор: $x = \pm 1$.

Задача Б. Дадени са квадратните тричлени $P_1(x) = x^2 + p_1 x + q_1, P_2(x) = x^2 + p_2 x + q_2$ и $P_3(x) = x^2 + p_3 x + q_3$. Да се докаже, че уравнението $|P_1| + |P_2| = |P_3|$ не може да има повече от осем корена. (Всерусийска Олимпиада, 1994г.)

Решение: Всеки корен на даденото уравнение е корен на един от квадратните тричлени от вида $\pm P_1 \pm P_2 \pm P_3$. Тези набори са на брой осем, но корените например на квадратния тричлен $-P_1 + P_2 + P_3$ и на $P_1 - P_2 - P_3$ съвпадат, защото двата квадратни тричлена са противоположни. Тоест осемте набора можем да разделим на четири двойки със съвпадащи корени, откъдето следва желаната оценка за броя на корените.

Задача В. Да разгледаме уравнението $|x| = x^2 - 4$, което можем да решим по различни начини – 1) чрез разглеждане на случаите $x \geq 0$ и $x < 0$ с цел освобождаване от модула; 2) чрез заместването на $|x|$ с y и 3) чрез графиките на функциите $f(x) = |x|$ и $g(x) = x^2 - 4$:



Разгледаното уравнение ни навежда на мисълта за изследване на по-общото уравнение от вида $|x - a_1| + |x - a_2| + \ldots + |x - a_n| = x^2 + px + q$, където $a_1, a_2, \ldots, a_n, p$ и q са реални числа.

Чрез използване на динамичните възможности на Geogebra се създава конструкция, която е приложима при решаването на цяла система от задачи. Нивото на сложност на тези задачи е по-високо от задължителното в училище, но с помощта на динамичния софтуер решаването им е лесно осъществимо.

Задачи по темата

Задача 1. Да се определи броя на корените на уравнението $|x| = x^2 + a$ в зависимост от стойностите на параметъра a.

Отговор: При $a > \frac{1}{4}$ 0 к.; при $a = \frac{1}{4}$ и $a < 0$ 2к; при $a = 0$ 3к, при $a \in \left(0; \frac{1}{4}\right)$ 4к.

Задача 2. Да се докаже, че за произволни реални числа a, b и c уравнението $|x - a| = x^2 + bx + c$ не може да има повече от четири корена.

Решение: Следва от факта, че даденото уравнение е равносилно с

$$\left| \begin{array}{l} x - a < 0 \\ a - x = x^2 + bx + c \end{array} \right. \cup \left| \begin{array}{l} x - a \geq 0 \\ x - a = x^2 + bx + c \end{array} \right.$$

и всяко от уравненията в системите има не повече от два корена.

Задача 3. Да се намерят реални числа a, b, c такива, че уравнението $|x - a| = x^2 + bx + c$ да има съответно: а) 0 б) 1 в) 2 г) 3 д) 4 корена.

Решение: За случаите в а), в) и г) могат да се вземат подходящи стойности на търсените константи от предишната задача 1. За б) е достатъчно да изберем $a = 0, b = -1, c = 1$ и уравнението има единствен корен $x = 1$, за г) избираме $a = 0, b = \frac{1}{4}, c = \frac{9}{64}$. Тогава даденото уравнение има за корени числата $-\frac{9}{8}; -\frac{1}{8}$ и $\frac{3}{8}$. Да отбележим, че подходящите примери можем да получим чрез съответно движение на параболата $y = x^2 + bx + c$.

Задача 4. Нека p и q са реални числа такива, че $q > \frac{1}{4}$ и $|p| = 2\sqrt{q} - 1$. Да се докаже, че уравнението $|x| = x^2 + px + q$ има точно един реален корен.

Решение: Да отбележим, че (при фиксирано q) ако за някакво p числото y е корен на даденото уравнение, то при $(-p)$ числото $(-y)$ е корен на уравнението и обратно. Ето защо е достатъчно да разгледаме само случая $p = 2\sqrt{q} - 1$. Да означим $q = r^2, r > \frac{1}{2}$, тогава $p = 2r - 1$ и даденото уравнение приема вида $|x| = x^2 + (2r - 1)\,x + r^2$. Можем да запишем това уравнение още и във вида $x + |x| = (x + r)^2$. Ако $x \leq 0$, то лесно получаваме, че $x = -r$ е единственото решение на уравнението. При $x > 0$ съответното квадратно уравнение има дискриминанта $4 - 8r$, която е отрицателна.

Задача 5. Да се намерят стойностите на параметъра a, за всяка от които съществува стойност на параметъра b такава, че уравнението $|x - a| = x^2 + b$ да има точно един корен.

Решение: От резултата на зад. 1 следва, че $a = 0$ не е решение на задачата. Освен това, корените на уравненията $|x - a| = x^2 + b$ и $|x + a| = x^2 + b$ (при фиксирано b) са двойки противоположни числа (откъдето следва, че двете уравнения имат един и същ брой корени), следователно е достатъчно да намерим само положителните стойности на параметъра a, които са решения на задачата. Даденото уравнение свеждаме до системите $\left| \begin{array}{l} x - a < 0 \\ x^2 + x + b - a = 0 \end{array} \right. \cup \left| \begin{array}{l} x - a \geq 0 \\ x^2 - x + b + a = 0 \end{array} \right.$. Дискриминантата D_1 на уравнението от първата система е $1 - 4b + 4a$, а дискриминантата D_2

на втората система е $1 - 4b - 4a$. Сега е достатъчно да изберем $b = \frac{1+4a}{4}$ за да имаме $D_1 = 0, D_2 < 0$. Оттук лесно можем да се убедим, че първата система има за единствено решение числото $x = -\frac{1}{2}$, а втората система няма решение. С други думи, показахме, че за всяко $a > 0$ уравнението $|x-a| = x^2 + \frac{1+4a}{4}$ има единствено решение (при това то е винаги числото $-\frac{1}{2}$), ето защо търсените стойности на a са $a \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Задача 6. Да се докаже, че за произволни реални числа уравнението $|x-a| + |x-b| = x^2 + cx + d$ не може да има повече от шест корена.

Решение: Прилагаме същата идея, както в задача 2 – даденото уравнение, в трите различни интервала, в които графиката на функцията $y = |x-a| + |x-b|$ изглежда по различен начин, даденото уравнение се свежда до три различни квадратни уравнения.

Задача 7. Да се намерят реални числа a, b, c и d такива, че уравнението $|x-a| + |x-b| = x^2 + cx + d$ да има съответно: а) 0 б) 1 в) 2 г) 3 д) 4 е) 5 ж) 6 корена.

Решение: За случаите а)–д) можем да изберем $a = b = 0$ и да разсъждаваме както в задача 3. За случай ж) подходящ пример е уравнението $|x| + |x-1| = x^2 - x + \frac{19}{16}$, чиито корени са числата $-\frac{3}{4}; -\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{5}{4}$ и $\frac{7}{4}$. За случая е) можем да разгледаме например уравнението $|x| + |x-1| = x^2 - \frac{10}{9}x + \frac{97}{81}$, чиито пет корена са числата $-\frac{4}{9}; \frac{2}{9}; \frac{8}{9}$ и $\frac{14 \pm 3\sqrt{2}}{9}$.

Задача 8. Да се реши уравнението $|x| + |x-1| + |x-2| = x^2 - 2x + \frac{51}{16}$.

Отговор: Уравнението има 8 корена – числата $-\frac{3}{4}; -\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{5}{4}; \frac{7}{4}; \frac{9}{4}; \frac{11}{4}$.

Задача 9. Да се докаже, че за произволни реални числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, p, q$ уравнението $|x-a_1| + |x-a_2| + \ldots + |x-a_n| = x^2 + px + q$ има не повече от $2n+2$ корена.

Решение: Задачата се явява непосредствено обобщение на задачи 2 и 6 и следва същата идея на решение.

Задача 10. Да се покаже пример за уравнение от вида в зад. 9, което има точно $2n+2$ корена.

Решение: Примерите от зад. 7ж и зад. 8 ни подсещат как трябва да изглежда търсеното уравнение (примерът не е единствен!):

Уравнението $|x| + |x-1| + \ldots |x-n| = x^2 - nx + \frac{8n^2+8n+3}{16}$ има за корени числата $\frac{1}{2}k - \frac{3}{4}, k = 0, 1, \ldots, 2n+3$. Ако $x \leq 0$, то даденото уравнение има вида $x^2 - nx + \frac{8n^2+8n+3}{16} = \frac{n(n+1)}{2} - (n+1)x$ или $x^2 + x + \frac{3}{16} = 0$ с корени $x = -\frac{3}{4}$ и

$x = -\frac{1}{4}$, които са и корени на даденото уравнение, понеже са отрицателни числа. Ако $x \geq n$, то даденото уравнение има вида $x^2 - nx + \frac{8n^2+8n+3}{16} = -\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)x$ или $x^2 - (2n+1)x + n^2 + n + 3/16$ с корени $x = \frac{4n+3}{4} = n + \frac{3}{4}$ и $x = \frac{4n+1}{4} = n + \frac{1}{4}$, които са и корени на даденото уравнение, защото са по-големи от n. Нека сега $x \in (a, a+1]$, където a е някое от числата $0, 1, \ldots, n-1$ (но фиксирано). Тогава, $|x| = x, \ldots, |x-a| = x-a$, докато $|x-(a+1)| = a+1-x, \ldots, |x-n| = n-x$. Следователно, лявата страна на уравнението има вида $(a+1)x - \frac{a(a+1)}{2} - (n-a)x + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{a(a+1)}{2}$ и уравнението приема вида $(2a+1-n)x - a(a+1) + \frac{n(n+1)}{2} = x^2 - nx + \frac{8n^2+8n+3}{16}$ или $x^2 - (2a+1)x + a^2 + a + \frac{3}{16} = 0$ с корени $x = a + \frac{1}{4}$ и $x = a + \frac{3}{4}$, които са корени и на даденото уравнение, защото принадлежат на интервала $(a; a+1)$. Ето защо разглежданото уравнение има точно $2n+4$ корена (които при това образуват и аритметична прогресия).

При решаването на задачите нашата основна цел бе насочена към активното участие на учениците в развитието на математическата идея и действията за конструиране на самите решения. Оказа се, че конструирането на решенията е по-трудно от решаването на конкретни приложения. При аналитичното представяне на решенията трудностите се появяваха при задачите с параметър. В тази насока прилагането на динамичната конструкция онагледи отделните случаи и показа на учениците връзката между графиките на квадратната функция и линейната функция, зададена с модул. По този начин учениците сами можеха да намерят решенията на уравненията като използват зависимостта между решение на уравнение и пресечни точки на графиките на съответните функции.

Създаването на динамичната конструкция при разглеждането на задачите е средство, чрез което тяхното решаване е по-лесно и разбираемо. В същото време винаги е необходимо да се намира баланс между използването на компютъра при разглеждане на уравнения от този вид и тяхното аналитично решаване.

Целта е чрез дидактическа система от задачи учениците да усвоят свойствата на квадратната функция, както и да използват ИКТ за алгебрични цели. Използването им ни помогна да разкрием и някои специфични особености на учебния процес по математика и да повишим ефективността на управлението му. Като най-важен принос в тази посока е разкриването на онези особености на логическата структура на математическите знания в училище, които указват влияния при повишаване нивото на обучение.

ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Върбанова, И. Ганчев. Методика на обучението по математика. В.Търново, "Астарта", 2002, стр. 31.

[2] А. Столяр. Педагогика на математиката. София, НП, 1976 г., стр. 97.

Катя Чалъкова
ПМГ "Иван Вазов"
Димитровград
e-mail: ka_peeva@abv.bg

Светлозар Дойчев
ПМГ "Гео Милев"
Стара Загора
e-mail: sv_doichev@abv.bg

THE DYNAMICAL SOFTWARE AND A CLASS OF EQUATIONS WITH ABSOLUTE VALUES

K. Chalakova, Sv. Doychev

The paper considers an application of the dynamical software *GeoGebra* in the teaching of the 11th grade students by the theme "Equations with absolute values". A certain type of equations with absolute values is examined and some results about the number of their roots are proved.