МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2012
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2012
Proceedings of the Forty First Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 9–12, 2012

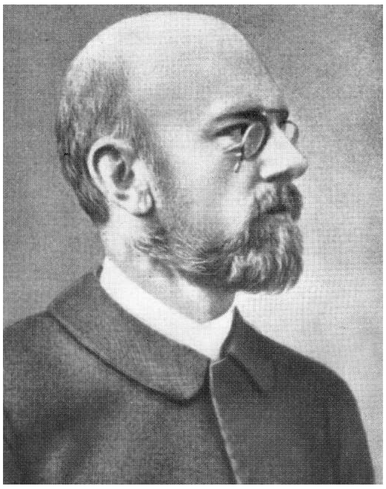
ДАВИД ХИЛБЕРТ
По случай 150-годишнината от рождението му

Иван Димовски*

Историята на математиката през 20 век все още не е написана. Но общо е признанието, че Давид Хилберт е най-големият математик на този век. Заедно с Анри Поанкаре, той е последният универсалист – математик, който има върхови постижения във всички области на съвременната му математика. Нещо повече, тези постижения до голяма степен са трасирали пътя на математиката на 20 век. Поанкаре също е универсалист, но неговите върхови постижения, като например теорията на автоморфните функции са направени през 19. век. И все пак едно сравнение между Хилберт и Поанкаре е поучително. На пръв поглед те са пълна противоположност: Хилберт е гений на аксиоматиката, докато Поанкаре е гений на математическата интуиция. И двамата обаче имат решаващи приноси във физиката – една тогава съвсем не дедуктивна наука. Поанкаре е един от създателите на специалната теория на относителността, а Хилберт е първият, написал правилните уравнения на общата теория на относителността. Факт е също, че именно Поанкаре предлага Хилберт за удостояване с наградата „Лобачевски" на Казанския университет, а Хилберт предлага Поанкаре за наградата „Бояй". И двамата имат историческата роля на свързващи звена между математиката на 19 век и тази на 20 век. За Хилберт самата математика е източникът на своите проблеми, докато според Поанкаре, математиката трябва да черпи проблемите си от физиката и механиката. И до днес спорът откъде идват значимите проблеми в математиката не е затихнал. Според математици, близки до кръга Бурбаки, математиката може успешно да се развива през следващите 10 000 години без да се опира на естествените науки (стига да има кой да храни математиците!). Според неотдавна починалия руски математик В. Арнолд, обаче, математически резултати, които не отговарят на въпроси, поставени от физиката, нямат особена стойност. Ако приемем това, обаче, съдбата на математиката се свързва със съдбата на физиката. Има видни физици, които сериозно смятат, че вече се вижда краят на теоретичната физика. Ако това е така, и краят на математиката е близък.Тази мрачна перспектива обаче няма как да се осъществи – теоремата на Гьодел е достатъчна гаранция за това. При тези две крайни позиции, истината е някъде по средата. Тази истина е изказал ученикът на Хилберт – Джон фон Нойман в забележителното си есе „Математикът" [1].

*Тази публикация е частично спонсорирана по Договор Д ИД 02/25/2009 с ФНИ–МОМН.

След тази прелюдия, да се върнем към нашия герой. Българският читател има възможност да чете оригинални трудове на Хилберт на български. Епохалното съчинение „Основи на геометрията“ [2] излезе в серията „Математическа класика“ на издателство „Наука и изкуство“. Съвсем неотдавна излезе прощалната лекция на Хилберт от 1930 г., озаглавена „Естествознание и логика“ [8]. Тази лекция дава недвусмислен отговор на споменатия спор, много преди той да е възникнал. Достъпни са и руските преводи на книги на Хилберт: „Нагледна геометрия“ (съавтор Кон-Фосен) [3], „Основи на теоретичната логика“ (съавтор Вилхелм Акерман) [4] и двутомника „Методи на математическата физика“ (съавтор Рихард Курант) [5]. Освен това, през 1998 г. руското издателство „Факториал“ издаде почти всички основни трудове на Хилберт в двутомника [6]. На български е преведена и прекрасната биография на Хилберт на Констанс Риид [7]. Като приложение към тази книга може да се прочете забележителният обзор на математическото творчество на Хилберт, написан скоро след смъртта му от неговия ученик Херман Вайл. В по-нататъшното изложение се ползват много от оценките на Вайл, защото те имат непреходна стойност.



Давид Хилберт е роден на 22 януари 1862 г. в селището Велау край Кьонигсберг – столицата на Източна Прусия. Кьонигсберг е родният град на великия философ Имануел Кант и на големия математик Карл Якоби. От тук е тръгнал и великия реформатор на математическия анализ Карл Вайерщрас. Бащата на Хилберт бил местен съдия, а майка му е била оригинална жена – интересувала се от философия и астрономия и проявявала интерес към простите числа. На училище тръгнал по-късно от другите деца – чак осемгодишен. В началното училище, което било част от известен колеж, малкият Давид бил подготвян за постъпване в класическа гимназия, в която по-голямата част от обучението се състояла в изучаване на чужди езици. За Давид запаметяването било трудно. Той не бил особено схватлив за нови идеи, защото не можел да възприеме нещо, преди да го е премислил самостоятелно. Иначе бил трудолюбив и не изоставал от съучениците си. Майка му помагала при писане на домашните. За сметка на това обаче, той често обяснявал на учителя си по математика задачите, които решавали в клас. Така той открил най-достъпния за себе си предмет – математиката. Единствено математиката не изисквала запаметяване. Но той разбирал, че ако не завърши гимназията с добър успех, няма да може да постъпи в университета да следва математика. В спомените си самият Хилберт по-късно казва: „Не се занимавах много с математика, защото знаех, че ще правя това по-късно.“ За негово щастие, за последната си гимназиална година той успял да се прехвърли от колежа в гимназия, в която на математиката се гледало като на основен предмет. Тук получавал много добри оценки почти по всички предмети, с изключение на математиката, по която имал отлична оценка. Нещо повече – на гърба на дипломата му било написано:

„Той винаги е показвал много жив интерес и дълбоко разбиране на математиката: усвоил е целият преподаван в училище материал по превъзходен начин и е в състояние до го прилага със сериозност и изобретателност.“

Това е първата оценка за математическите му способности. Въпреки настояването на баща си, Хилберт записва да следва не право, а математика, която тогава се изучавала във философския факултет. Това станало през 1880 година. Въпреки че възпитаници на Кьонигсбергския университет са били Якоби и Вайерщрас, той не е бил центърът на математическия живот в Германия. Тогава се разгаряли математическите страсти около учението за множествата на Гьорг Кантор, който за пръв път въвел в обръщение понятието „актуална безкрайност“. Към него се присъединил Рихард Дедекинд, но влиятелният берлински математик Леополд Кронекер посрещнал „на нож“ идеите на Кантор. През втория семестър Хилберт се преместил в Хайделбергския университет, където се запознал с известния математик Лазарус Фукс. По-следващия семестър се преместил в Берлин, където слушал лекциите на Хайнрих Вебер – ученик на Бернхард Риман и негов съавтор на курса по математическа физика, известен като „Риман – Вебер“, години по-късно заместен с курса „Хилберт – Курант“.

През 1882 г. Хилберт се завръща в Кьонигсберг, където се събира със своя приятел Херман Минковски. Тогава в научните среди се ширел песимизъм относно познавателните възможности на човека и по–специално, във възможността всяка добре поставена задача да получи решение. Удар по тези песимистични настроения нанесъл Фердинанд Линдеман, който решил вековната задача за квадратурата на кръга, като доказал трансцендентността на числото π. Когато Вебер напуснал Кьонигсберг, неговото място заел Линдеман. Въпреки славата си, Линдеман не бил добър преподавател и не е оказал особено влияние върху развитието на Хилберт. Истинският учител на Хилберт в математиката бил Адолф Хурвиц. През 1884 г. той заел длъжността извънреден професор, преди да е навършил 25 години. Първата си работа Хурвиц написал като ученик съвместно с учителя си Ханибал Шуберт, на когото е наречено „смятането на Шуберт“, което фигурира в един от 23-те проблеми на Хилберт. Хурвиц защитил докторска степен при Феликс Клайн. Хилберт, Минковски и Хурвиц станали близки приятели и в продължителни разходки обсъждали най-различни математически въпроси. В тези „перипатични“ обсъждания доминирал Хурвиц, а Хилберт и Минковски повече слушали и мечтаели да стигнат неговата ерудиция.

След като завършил задължителните осем семестра, необходими за постъпване в докторантура., Хилберт започнал да търси тема за дисертацията си. Линдеман, който му бил ръководител, предложил да разработи някоя тема от теорията на алгебричните инварианти. Теорията на инвариантите е била основна за математиците от втората половина на 19 век. Пионери били англичаните Артур Кейли и Джеймс Силвестър (в известна степен и американски математик). Темата, дадена от Линдеман, била да се изучат инварианти на определени алгебрични форми при унимодулярни линейни трансформации на променливите. Най-простият инвариант е декартовото разстояние между две точки, дадени с координатите си.

Хилберт се справил бързо по оригинален начин и Линдеман бил доволен. Публичната промоция станала през 1885 г. За да получи званието приват-доцент, обаче, той трябвало да направи още някое самостоятелно изследване. Преди това той поискал да направи едно обхождане на немски университети с опознавателна цел. По съвета на Хурвиц, той отишъл първо в Лайпциг при Феликс Клайн. Последният не бил в най-добрата си форма, защото точно тогава бил загубил състезанието с Поанкаре за автоморфните функции и бил в дълбока депресия. Това по-късно самият Клайн описал прекрасно в своите „Лекции за развитието на математиката през 19 век“ (преведени на български). Въпреки това, Клайн обърнал внимание на младия Хилберт, като му възложил доклад за своя семинар. За впечатлението, което оставил този доклад у Клайн говори фактът, че той пазел текста му до смъртта си, както и думите, които той казал по-късно: „Когато чух неговия доклад, веднага разбрах, че това е бъдещият човек в математиката“.

Клайн се опитал да убеди Хилберт да посети Париж – най-активния тогава математически център в света. Нужна била и намесата на Хурвиц и Хилберт приел.

През 1886 г. Хилберт вече бил в Париж и по съвета на Клайн се опитал да се сприятели с Поанкаре, който бил само шест години по-възрастен от него. Интересни са първите впечатления на Хилберт от Поанкаре:

„Той чете лекциите си много ясно и твърде разбираемо за моя начин на мислене, макар и, както каза един френски студент, малко бързо. Прави впечатление на твърде млад и малко нервен човек.“

Измежду френските математици, най-силно впечатление му направил Шарл Ермит. На връщане в края на семестъра Хилберт се отбил при Клайн в Гьотинген. В Берлин посетил „страшния“ Кронекер, който не признавал нито теорията на множествата, нито ирационалните числа. Като се завърнал в Кьонигсберг, Хилберт се заел сериозно с хабилитацията си, като избрал пак тема от теорията на инвариантите, но по-амбициозна от тази на доктората му.

През 1888 г. Хилберт предприел дълго пътуване из немските университети с намерение да се срещне с 21 предварително набелязани млади математици. Първото му посещение било при Паул Гордан в Ерланген. Гордан заслужено носел прозвището „цар на инвариантите“. Най-голямото постижение на Гордан преди Хилберт било установяването на съществуването на крайна база на инвариантите на най-простите форми – бинарните. В продължение на 20 години нямало никакъв напредък в тази област. Изследванията на Гордан били изпълнени с дълги непроходими пресмятания, без откриване на някаква идейна нишка. За пръв път въображението на Хилберт било запалено. Той се сблъскал със задача, която е: 1) ясна и разбираема; 2) трудна, но преодолима; 3) значима. Мисълта за проблемата на Гордан, т.е. за разширяване на резултата му от бинарни за всякакви форми, не го напускала през цялото време когато пътувал с влака от Ерланген до Гьотинген. Още там получил просто и прозрачно доказателство на теоремата на Гордан за бинарните форми. В съчиненията му това заема непълни 3 страници. След завръщането в Кьонигсберг, той решава бързо проблема на Гордан за инвариантите на форми с произволен брой променливи, като по напълно нов начин доказва две теореми: 1) Съществуване на крайна база на цялост, чрез която всеки инвариант може да се изрази като полином на определен брой от инвариантите на базата; 2) Че тъждествените релации между инвариантите на базата имат крайна идеална база, т.е. могат да се изразят като линейни комбинации с коефициенти полиноми на същите променливи. Решаващата идея Хилберт извлякъл, изучавайки работа на Кронекер за съществуване на крайна база на модул. Съответните понятия се съдържали в знаменитото 11-то допълнение към „Лекции по теория на числата“ на Льожон Дирихле, написано от Рихард Дедекинд (преведени на български). Резултатът бил формулиран като една проста, почти тривиална лема. От тази лема обаче веднага следвало решението на проблема на Гордан за произволни форми. Веднага след публикуването, Хилберт изпратил отпечатъци на всички заинтересовани. Пръв се отзовал Кейли, който първо се усъмнил в простото доказателство, но после сърдечно поздравил Хилберт. Реакцията на немските математици била противоречива. Линдеман нарекъл методите на Хилберт *unheimlich* (т.е. зловещи), а самият Гордан произнесъл фраза, която останала в историята на математиката: „Това не е математика, а теология“. Само Клайн се произнесъл одобрително: „Решението е съвсем просто и поради това е неопровержимо“. Във всички тези оценки личало влиянието на Кронекер, който не признавал чисти теореми за съществуване. През 1892 г. обаче Хилберт построил пълна система от инварианти и получил признание дори от Гордан. Така, използвайки новите идеи на алгебрата, разработени от Кронекер и Дедекинд, Хилберт закрил проблема за инвариантите, поне що се отнася до общата линейна група. Това постижение сравняват с разсичането на Гордиевия възел от Александър Велики, поради сходството на имената на Гордий и Гордан.

През същата 1892 г. Хилберт решил не само проблема на Гордан, но и основни проблеми от личния си живот и научна кариера. Оженил се за Кете Йерош и заел мястото на Хурвиц в Кьонигсберг, който междувременно се бил преместил в Цюрих. Точно тогава Хилберт променя рязко своята математическа тематика, като дава нови доказателства за трансцендентността на числата e и π. Тези доказателства не само значително опростяват първоначалните доказателства на Ермит и Линдеман, но идеите, на които се основават, намират отражение в изследванията за трансценденост през 20 век. Тук е мястото да споменем, че Седмият проблем на Хилберт, който поставя въпроса за трансцендентността на числа от специален вид, оказва силно влияние за развитието на тази тематика през 20 век. Значимо събитие в личния живот на Хилберт през 1893 г. било раждането на сина му, когото кръстили Франц. Понеже много приличал на баща си, по-късно Хилберт обичал да казва, че той бил наследил всичко от него с изключение на математическите способности, които наследил от майка си.

Хилберт решил да насочи усилията си към теорията на числата и по–специално, към теорията на целите алгебрични числа. През 19 век били получени много и силни резултати в тази област, между които се откроявали постиженията на Кронекер и Дедекинд, но те не били систематизирани в цялостна теория. Ето защо, Немското математическо дружество, в създаването на което взел участие и Хилберт, му възложило, заедно с Минковски през следващите две години да направят доклад-обзор, който да запълни съществуващата празнота. Минковски поел рационалните числа, а Хилберт – целите алгебрични числа. През 1894 г. Хилберт се захванал с ентусиазъм със своята задача и така положил началото на съчинението си влязло в историята на математиката като *Zahlbericht* (Доклад за числата) – епохално произведение, което поставя началото на съвременната теория на полетата от класове. До 1896 г. Хилберт бил завършил своя дял, а Минковски – не. Тогава те решили всеки да публикува своя дял поотделно. Минковски помагал всеотдайно на Хилберт в коректурите. Когато всичко било готово, Минковски писал на Хилберт от Цюрих: „Аз все още виждам много неща, които могат да се критикуват. Няма ли евентуално да споменеш в предговора си факта, че съм прочел последните три части в ръкопис?“ Разбира се, Хилберт отдал дължимото на приятеля си. Най-важният самостоятелен принос на Хилберт бил в Теорема 90, в която се характеризират абеловите разширения на полета от алгебрични числа. Хелберт предугадал редица резултати, които били установени по-късно от Тейджи Такаги, Хелмут Хасе, Емил Артин и Клод Шевалие. За разлика от трудовете му по теория на инвариантите, тук той не е терминатор, а основоположник.

Точно в този момент Хилберт рязко прекъсва най-блестящия период от своето творчество и се прехвърля към основите на геометрията. Обявата, че през зимния семестър на учебната 1898–1899 г. Хилберт ще чете лекции върху основите на геометрията учудила както колегите му, така и студентите. Дотогава той говорел само за „алгебрични числови полета“. По онова време геометрията била изучавана по „Елементите“ на Евклид. Наистина, всички знаели за неевклидовата геометрия на Лобачевски–Бояй, за нейните модели в евклидовата геометрия, но имало само плахи опити за аксиоматично изложение (Мориц Паш, Джузепе Пеано и др.). Хилберт дал образец на приложение на аксиоматичния метод за строго последователно изложение на целия материал, съдържащ се в „Елементи“ на Евклид. На първо място Хилберт радикално се отказал да дава дефиниции на основните понятия точка, права, равнина, а също и на линия и повърхнина, както прави Евклид. Хилберт казва: „Да си представим три вида неща. Първите ще наричаме *точки* и ще означаваме с , , , . . . “. Другите два вида неща нарекъл *прави* и *равнини*. Не се предполага те да имат каквито и да е априорни свойства, каквито великият съгражданин на Хилберг Имануел Кант предполагал. Самото легитимно съществуване на неевклидова геометрия опровергавало основните положения на Кантовата философия. В прощалната си лекция „Естествознание и логика“ [8] Хилберт прави известен реверанс към Кант, като се опитва да оправдае заблуждението му. Можем да му простим това като дан на местен патриотизъм. Истинските дефиниции на основните понятия са аксиомите. Те трябва да са *пълни* – от тях трябва да могат да бъдат изведени всички теореми. Те трябва да са *независими*, което означава, че ако бъде отстранена която и да е от тях, няма да може да бъде доказана поне една теорема. *Съвместимостта* на аксиомите означава, че от тях не могат да бъдат изведени противоречиви свойства. Непротиворечивостта на евклидовата геометрия следва от модела ѝ в системата на реалните числа, който предлага аналитичната геометрия на Рене Декарт. А дали е непротиворечива системата на реалните числа? Толкова непротиворечива, колкото и системата на естествените числа. Това е така, защото, както всички знаят, реалните числа се изграждат чрез последователни разширения на системата на естествените числа. Въпросът за непротиворечивостта на аритметиката е Вторият проблем на Хилберт от неговия Парижки доклад. „Основи на геометрията“ излиза през 1899 г. и става бестселър. Мотото на книгата: „Тъй като цялото човешко познание започва от съзерцание, преминава от него към понятия и завършва с идеи“ е взето от „Критика на чистия разум“ на Кант и, очевидно, противоречи на Лениновата теза: „От живото съзерцание към абстрактната мислене, а от него към практиката – такъв е диалектическият път на познанието“. Естествено е в руския превод от 1948 г. мотото на Хилберт да липсва.

Следващият период от творчеството на Хилберт е свързан с т.нар. принцип на Дирихле. Според този принцип, формулиран в лекциите на Дирихле [9], издадени след смъртта му, решението на уравнението на Лаплас при дадени стойности по контура на областта е такова, че интегралът от сбора на квадратитие на частните производни на решението по областта трябва да приема минимална стойност. Риман основал на този принцип своята обща теория на аналитичните функции. Вайерщрас напълно компрометира този принцип, като дава контрапример. Положението не се променя до края на 19 век. Математиците били изоставили всякаква надежда да спасят принципа на Дирихле. Хилберт не се отказал от математическата строгост, насаждана от Вайерщрас, а я превърнал в инструмент за математическо изследване. През 1901 г. той представил своя труд, в който на няколко страници „възкресява“ принципа на Дирихле в неговия първоначален блясък. С това той става родоначалник на т. нар. “директни вариационни методи“, които преобразуват коренно приложната математика на 20 век. Решаваща стъпка в това отношение направил физикът Валтер Риц, вдъхновен от труда на Хилберт. Това повлияло и на самия Хилберт, който започнал да чете лекции по вариационно смятане. Един от студентите, посещавали тези лекции – бъдещият Нобелов лауреат по физика, Макс фон Лауе, пише за тези лекции:

„...какво бе моето удивление, когато видях колко много информация за природата може да се получи с помощта на математическия метод“. За самия Хилберт той добавя: „Този човек живее в паметта ми може би като най-великия гений, който някога съм виждал“.

През този период Хилберт все още бил овладян от духа (или по-точно, демона) на аксиоматичния метод и пише статията „Понятието число“, в която вместо генетичен подход към понятието реално число, предлага аксиоматичен. С въведената аксиома за пълнота, той въвел понятието максимален (категоричен) модел. Точно тогава Хилберт получил покана да изнесе един от главните доклади на Втория световен конгрес на математиците, който трябвало да се проведе през лятото на 1900 г. в Париж. Хилберт дълго обмислял с приятеля си Минковски каква тема да избере. На предишния конгрес Поанкаре бил изнесъл популярен доклад за взаимната връзка между математиката и физиката. Хилберт инстинктивно се стремял неговия доклад да бъде контрапункт на доклада на Поанкаре. Затова решил с доклада си да надникне в бъдещето, като изброи проблемите, които математиците на идващия век би трябвало да се опитат да решат. Минковски изразил съмнения към такава тема. Тогава Хилберт се обърнал за съвет и към своя приятел Хурвиц. Не е известно какво е отговорил Хурвиц, но Хилберт потвърдил първоначалното си решение и набързо отпечатал копия на доклада си на френски език. На 5 август 1900 г. вече бил в Париж. На 6 август Поанкаре открил конгреса. Докладът на Хилберт бил изнесен не в главна секция, а в секцията по образование в съвместно заседание със секцията по библиография и история. С увода на доклада (цели 10 страници) всеки може до се запознае от глава 10 на книгата на Констанс Риид [7]. Възторженият поетичен стил на Хилберт е неподражаем. Вярата на Хилберт, че всяка задача може да бъде решена е безгранична. След като привежда примери на трудни и нерешени задачи, като Великата теорема на Ферма, Хилберт заключава: „Колкото и непреодолими да ни се струват тези проблеми, колкото и безпомощно да стоим сега пред тях, все пак ние имаме пълната увереност, че решението им трябва да е достижимо чрез краен брой логически заключения“. Днес, от височата на 21 век, след теоремата на Гьодел, никой сериозен математик не би се подписал под това заявление. На конгреса в устното си изложение, съобщил само 10 проблема. Между тях били:

1) Хипотезата на Кантор за континуума в следната формулировка: всяко множество от реални числа е равномощно или с множество от естествени числа, или с цялото множество на реалните числа.
2) Съвместимостта на аксиомите на естествените числа.
3) Аксиоматизиране на механиката и на теорията на вероятностите.
4) Установяване трансцендентността или поне ирационалността на определени числа.
5) Хипотезата на Риман за дзета-функцията.
6) Невъзможността за решаване на общото уравнение от седма степен чрез функции на две променливи.

В раздадения печатен доклад имало всичко 23 проблеми. Голяма част от историята (все още ненаписана) на математиката на 20 век е свързана с решаване на тези проблеми. На не бива и да се преувеличава значението им, защото много нови основни направления през 20 век не водят началото си от тези проблеми. Бурното развитие на алгебрата и топологията, например, има други корени. В основата на това развитие, обаче, пак лежи системното използване на аксиоматичния метод, но не във формата, в която Хилберт изгражда геометрията. През 1914 г. Феликс Хаусдорф аксиоматизира понятието топологично пространство, а Еми Ньотер и Артин през 20-те години аксиоматизират алгебрата. През 1933 г. Андрей Колмогоров аксиоматизира теорията на вероятностите, с което решава половината от Седмия проблем на Хилберт. През 1964 г. американският математик Пол Коен реши проблема за континуума, като доказа независимостта на континуум-хипотезата на Кантор. За интересните резултати по тези и други от проблемите на Хилберт, читателят може да прочете в сборника „Проблемы Гильберта“ [10]. Парадоксално е, че днес славата на Хилберт се основава главно на неговите Проблеми, в които няма почти нищо от неговото творческо амплоа. Заслугата му е в майсторския подбор на тези проблеми. Историята на математиката на 20 век доказва това по безспорен начин.

През периода 1900–1910 г. основните творчески постижения на Хилберт са свързани с изграждането на теорията на интегралните уравнения със симетрично ядро и полагането на основите на безкрайномерни пространства, които днес наричаме хилбертови. Хилберт използва аналогия със системите линейни уравнения и спектралните задачи за симетрични матрици. Той разглежда квадратични форми с безбройно много променливи и въвежда напълно непрекъснати и ограничени оператори. Спектралната теория на напълно непрекъснатите оператори се получава с граничен преход от крайномерния случай, но Хилберт успява да обхване и случая на ограничен оператор, когато е налице и непрекъснат спектър. Необикновеното в тази история е фактът, че след 20 години езикът на операторите в хилбертово пространство се оказал език на новосъздадената квантова механика. Наложило се само Джон фон Нойман, ученик на Хилберт, да допълни теорията му с неограничени оператори.

През 1909 г. Хилберт решава стар проблем на Едуард Уоринг от 1770 г. Хипотезата на Уоринг гласи, че всяко естествено число може да се представи като сбор от n–ти степени на естествени числа. В случая $n = 2$ Лагранж доказал, че всяко естествено число е представимо като сбор на четири квадрата. Уоринг предположил, че за кубовете стигат 9 куба, а за четвъртите степени – 19 такива степени. Доказателството на Хилберт е блестящо по замисъл и изпълнение, но не дава точна оценка за броя на събираемите. Точни оценки са получени по-късно от Харолд Харди и Джон Литълууд и от Юрий Линник. Това е последната работа на Хилберт по теория на числата.

Точно в този момент, когато Хилберт трябва да триумфира за най-голямото си „спортно“ постижение в математиката, той е потресен от неочаквана загуба – умира скоропостижно най-близкият му приятел Минковски. Той посвещава работата си, съдържаща решението на проблема на Уоринг на паметта на приятеля си и написва прочувствен некролог. Няколко години преди това те заедно изучават физика, подтикнати от първите работи на Алберт Айнщайн по специалната теория на относителността. Айнщайн е бил студент на Минковски в Цюрих, но Минковски си спомнял за него само, че бягал от лекциите му. „Никога не съм очаквал, че Айнщайн може да направи нещо подобно“ – казвал Минковски. В резултат от това взаимоспомагателно изучаване на физиката, Минковски геометризирал специалната теория на относителността, като въвел четиримерното пространство-време със съответна индефинитна метрика. Хилберт още не бил узрял за собствен принос към физиката, като се изключи направеното от него приложение на неговата теория на интегралните уравнения към кинетичната теория на газовете на Максуел – Болцман. На Хилберт било съдено да стане „акушер“ в раждането на общата теория на относителността. През 1915 г. Хилберт и Айнщайн почти едновременно стигат до точните уравнения на общата теория на относителността. Драматичното състезание между двамата е описано в книжката „Физика, геометрия, симетрия“ на акад. Иван Тодоров [11] в главата „Осем години и един месец от историята на създаването на общата теория на относителността“. Повече за този епизод от историята на физиката може да се прочете на стр. 249–254 от книгата на Пайс [12]. Струва ми се справедливо, наред с Айнщайн и Хилберт да бъде признат за създател на математическите основи на ОТО. Що се отнася до физическите основи на ОТО, тук заслугата на Айнщайн е еднолична. Самият Айнщайн не отдава заслуженото на Хилберт, като в първата си публикация по ОТО споменава името на Хилберт мимоходом, когато говори за вариационния принцип, от който следват уравненията на ОТО, с други думи – нещо като гарнитура към уравнения, намерени от Айнщайн. Фактически, тези уравнения са намерени първо от Хилберт, а една седмица след това и от Айнщайн. По-късно Хилберт ще отбележи иронично: „Физиката е твърде трудна за физици“.

Не бива да пропускаме главното дело на Хилберт – основите на математиката. На задачата за укрепването на пропуканите в началото на 20 век основи на теоретико-множествена математика той посвещава повече от 20 години от творческия си живот. И въпреки, че резултатът от неговите усилия може да се оцени като провал, тези усилия не са били напразни. С тях е създадена съвременната версия на аксиоматичния метод и новата математическа дисциплина – метаматематиката.

Хилберт е бил подтикнат от нетърпимите парадокси на наивната теория на множествата от началото на 20 век. Между тях изпъква антиномията на Бъртранд Ръсел, която независимо била открита и от Ернст Цермело. Тази антиномия така поразила Готлоб Фреге и Дедекинд, че те счели, че всичко направено от тях в математиката е безсмислено.

Хилберт, воден от своя оптимизъм, че „Никой не може да ни изгони от рая, който ни създаде Кантор“, предложил широка програма за обосноваване на математиката чрез пълното ѝ формализиране. Наченки на такава програма може да се види в трудовете на Лайбниц, но те не получили развитие след него. Съществено е изискването до заключенията да се стига след краен брой формално-логически стъпки. Това е нещо като програма, по която работи съвременният компютър. Хилберт бил убеден, че може да се докаже, че така никога няма да се стигне до противоречие, например в системата на естествените числа. Тази програма на Хилберт била активно изпълнявана от учениците му, между който на първо място бил Пол Бернайс. Резултат от тези усилия била тяхната двутомната монография „Основи на математиката“. Неизпълнимостта на програмата на Хилберт, поне в нейния първоначален вид, станала очевидна след труда на Курт Гьодел от 1930 г. Казват, че когато Хилберт научил за нея, той бил „малко ядосан“. Хилберт и Гьодел никога не са се срещали. За това може само да се съжалява. А какво е състоянието на изследванията по основите на математиката днес? Без да съм специалист в тази област, имам впечатлението, че то не е по-благополучно от времето на Хилберт. Аксиоматичните системи на теорията на множествата от типа на Цермело-Френкел имат незапълними „черни дупки“. В тях не може нито да се докажат, нито да се опровергаят редица възлови за математиката твърдения, като хипотезата за континуума, аксиомата за избора, а даже съществуването или несъществуването на неизмерими по Анри Льобег множества. Може пък „раят“, създаден от Кантор за математиците, да е една илюзия? И все пак великата заслуга на Хилберт е, че накара математиците да осъзнаят цялата дълбочина на проблемите на основите на собствената им наука.

След като описахме на едро творческата биография на Хилберт, да се спрем и на личния му живот в Гьотинген. Щастлив в семейния живот, той имал син Франц, който едва ли го е радвал дълго. Той рано започнал да проявява психични смущения. Това принудило веднъж Хилберт да каже: „Аз нямам вече син.“ Хилберт бил открит човек без никакви расови или религиозни предразсъдъци. Под негово ръководство били защитени около 60 дисертации на математици не само от Германия, но и от други страни. Неговият семинар като магнит привличал математици от цял свят. В автобиографията си „Аз съм математик“ Норбърт Винер разказва, че след като изнесъл доклада си, коментарът на Хилберт бил: „Слушали сме всякакви доклади – и добри и лоши. Този доклад обаче е едно изключение.“ Винер очаквал похвала. „Този доклад беше най-лошият, който някога сме слушали“, завършил Хилберт. Благодарение на Хилберт, Гьотинген се превърнал в най-значимия математически център в света. Но всичко рухнало изведнъж с идването на Хитлер на власт. Властите наложили да бъдат лишени от лекции всички евреи, между които Едмунд Ландау, Еми Ньотер, Рихард Курант и др. С цялата си наивност Хилберт ги убеждавал да съдят държавата. „Това е незаконно“ – казвал той, но скоро сметнал, че е по-добре да не се обажда. Когато всички евреи напуснали Гьотинген, нацисткият министър на просветата попитал Хилберт: „Как върви математиката в Гьотинген след като се освободихте от евреите?“ „ Каква математика? Вече няма такова нещо.“ – отговорил Хилберт. Той все повече се затварял в себе си и имал провали в паметта. Известният руски тополог Павел Сергеевич Александров, който пребивавал по това време в Гьотинген да пише съвместно с Хайнц Хопф книгата „Топология“, разказва, че когато срещнел Хилберт на улицата, той го поздравявал учтиво, но Хилберт не го познавал и имало даже случаи, когато при среща Хилберт побягвал. За 80-тата си годишнина Хилберт получил грамота от Берлинската академия за книгата си „Основи на геометрията“- най-популярното негово съчинение. Същия ден той паднал на улицата и си счупил ръката. От усложненията от това счупване и от принудителния застоял живот, Хилберт починал на 14 февруари 1943 г. На погребението от неговите ученици присъствали Арнолд Зомерфелд и Густав Херглоц. Друг негов близък ученик, Константин Каратеодори, не могъл да присъствува, но изпратил прочувствен адрес. Само две години го надживяла съпругата му Кете.

Не са нужни суперлативи за оценка на делото на Давид Хилберт. Неговото математическо творчество е неговият най-добър паметник. То дълго няма да загуби не само своята историческа, но и актуална стойност. Оптимизмът на Хилберт изразен с думите: „Ние трябва да знаем! Ние ще знаем!“ трябва да е стимул за всеки, който се захваща с научно творчество.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. фон Нойман. Математикът. В: Математика в миниатюри. „Наука и изкуство“, София, 1986.

[2] Д. Хилберт. Основи на геометрията. „Наука и изкуство“, София, 1978.

[3] Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен. Наглядная геометрия. „Наука“, Москва, 1981.

[4] Д. Гильберт, В. Аккерман. Основы теоретической логики. ИЛ, Москва, 1947.

[5] Р. Курант, Д. Гильберт. Методы математической физики, тт. **1** и **2**, Гостехиздат, Москва–Ленинград, 1951.

[6] Д. Гильберт. Избранные труды, **I** и **II**. Факториал, Москва, 1998.

[7] К. Риид. Хилберт. „Наука и изкуство“, София, 1973.

[8] Д. Хилберт. Естествознание и логика. *Светът на физиката*, **33** (2010) № 3, 293–300.

[9] P. G. Lejeune Dirichlet. Vorlesungen ueber umkehrten Verhaeltniss des Qudrats der Entfernung wirkenden Kraefte. Teubner, Lepzig, 1876.

[10] П. С. Александров (ред.) Проблемы Гильберта. „Наука“, Москва, 1969.

[11] И. Тодоров. Физика, геометрия, симетрия. „Народна просвета“, София, 1985.

[12] А. Пайс. Научная деятельность и жизнь Альберта Эйнштейна. „Наука“, Москва, 1989.

Иван Димовски
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките
ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8
1113 София