

ТЕГЛОВИ АПРОКСИМАЦИИ С ОПЕРАТОРИ ОТ ТИП НА ГУДМАН–ШАРМА*

Първан Е. Първанов

Равномерната теглова апроксимация с модифицирани по Гудман–Шарма оператори от тип на Бернщайн, Баскаков и Майер–Кьоних–Целер е характеризирана за алгебрически тегла с ефект на краищата. Доказани са прави и обратни теореми от силен тип A в термините на подходящи K -функционали.

1. Увод. Операторът от тип на Бернщайн разгледан от Гудман и Шарма в [7] and [8]

$$U_n f(x) = \sum_{k=0}^n u_{n,k}(f) P_{n,k}(x) \\ = f(0)P_{n,0}(x) + f(1)P_{n,n}(x) + \sum_{k=1}^{n-1} P_{n,k}(x) \int_0^1 (n-1)P_{n-2,k-1}(y)f(y)dy,$$

където $P_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ а f е интегрируема по Лебег в $(0,1)$ функция с крайни граници в 0 и 1, бе обект на обстойно изследване в дисертацията ми, като резултатите от съвместната ни работа с Б. Попов бяха публикувани в [15]. Получените в хода на доказателството на права и обратна теорема от силен вид „А“ (по терминологията на [5]) както и елегантни свойства на оператора предполагаха по-нататъшни изследвания. По идея на Камен Иванов през 2007 година започнахме изследване на приближения с тегла от полиномиален вид с ефект в краищата. Първоначално изследвахме горепосочения оператор, а после и други два оператора от интегрален вид с подобни свойства.

Настоящия доклад прави обзор върху постигнатите резултати.

2. Теглови приближения с модифициран по Гудман–Шарма оператор на Бернщайн (оператор на Гудман–Шарма). Това са резултатите от съвместната ни с К. Иванов работа [11].

Разглеждаме теглови функции

$$(2.1) \quad w(x) = w(\gamma_0, \gamma_1; x) = x^{\gamma_0} (1-x)^{\gamma_1} \text{ за } x \in (0,1) \text{ и } \gamma_0, \gamma_1 \in [-1,0].$$

* **2000 Mathematics Subject Classification:** 41A36, 41A10, 41A25, 41A27, 41A17.

Key words: Bernstein-type operator, Baskakov-type operator, Meyer–Konig and Zeller operators, Direct theorem, Strong converse theorem, K -functional.

С $\varphi(x) = x(1-x)$ означаваме естествено свързаното с вторите производни на операторите на Бернщайн и Гудман–Шарма тегло. Производните означаваме с $D = \frac{d}{dx}$.

С $C[0, 1]$, както обикновено означаваме пространството на непрекъснатите в $[0, 1]$ функции с равномерната норма $\|\cdot\|$, а с $L_\infty[0, 1]$ - измеримите по Лебег и ограничени в $[0, 1]$ функции. За теглото w дефинираме $C(w)[0, 1] = \{f \in C[0, 1] : wf \in L_\infty[0, 1]\}$ и

$$W^2(w\varphi)[0, 1] = \{g, g' \in AC_{loc}(0, 1) : w\varphi D^2g \in L_\infty[0, 1]\},$$

където $AC_{loc}(0, 1)$ се състои от абсолютно непрекъснатите в $[a, b]$ функции за всеки $[a, b] \subset (0, 1)$. Нека $C_0(w)[0, 1] = \{f \in C(w)[0, 1] : f(0) = f(1) = 0\}$, а $W_0^2(w\varphi)[0, 1]$ е подмножеството на $W^2(w\varphi)[0, 1]$ от функции g удовлетворяващи допълнително

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \varphi(x)D^2g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \varphi(x)D^2g(x) = 0.$$

Оценките за тегловите апроксимации с U_n за функции от $C_0(w)[0, 1] + \pi_1$ са получени с помощта на K -функционала

$$K_w(f, t) = \inf \{\|w(f - g)\| + t\|w\varphi D^2g\| : g \in W^2(w\varphi)[0, 1]\}.$$

Основният резултат е Теорема 2.1, съдържаща права (2.2) и силна обратна теорема от вид А (2.3) в терминологията на [5].

Теорема 2.1 [11, Теорема 1.1]. *Нека $w = w(\gamma_0, \gamma_1)$ е зададено с (2.1). Тогава, съществува абсолютна константа M , такава че за всяка $f \in C(w)[0, 1] + \pi_1$ и всяко $n \in \mathbb{N}$,*

$$(2.2) \quad \|w(f - U_n f)\| \leq 2K_w\left(f, \frac{1}{2n}\right),$$

$$(2.3) \quad K_w\left(f, \frac{1}{2n}\right) \leq \left(\frac{162 + 9\sqrt{2}}{28} + \frac{M}{n}\right) \|w(f - U_n f)\|.$$

Този резултат обобщава резултата от [15], който се отнася за случая $w = 1$.

В доказателството на теоремата съществено се използват елегантните свойства на оператора U_n :

- запазване на линейните функции;
- комутиране със себе си ($U_n U_m f = U_m U_n f$);
- комутиране с диференциалния оператор φD^2 :

Лема 2.1 [11, Лема 2.2]. *За всяка $g \in W_0^2(\varphi)[0, 1]$ и всяко $n \in \mathbb{N}$,*

$$\varphi(x)D^2U_n g(x) = U_n(\varphi D^2g)(x);$$

- представянето в

Лема 2.2 [11, Лема 2.1]. *За всяка $f \in C[0, 1]$ и всяко $k \in \mathbb{N}$ имаме*

$$U_k f(x) - U_{k+1} f(x) = \frac{1}{k(k+1)} \varphi(x)D^2U_{k+1} f(x).$$

Последните две съществено улесняват доказателството на обратната теорема, в хода на което също така са доказани неравенство от тип на Вороновская:

Лема 2.3 [11, Лема 4.1]. Нека w^{-1} е вдлъбнатата функция. Тогава за всяка функция

$g \in W_0^2(w\varphi)[0, 1]$, такава че $\varphi D^2 g \in W^2(w\varphi)[0, 1]$ и за всяко $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено

$$\left\| w \left(U_n g - g - \frac{1}{n} \varphi D^2 \left(\frac{g + U_n g}{2} \right) \right) \right\| \leq \frac{16n^4 + 16n^3 - 1}{4n^2(16n^4 - 8n^2 + 1)} \|w\varphi D^2(\varphi D^2 g)\|.$$

и особено същественото за тегловата апроксимация неравенство от тип на Бернщайн:

Лема 2.4 [11, Лема 4.2]. Нека теглото w е дадено с (2.1), като $\gamma_0, \gamma_1 \in [-1, 0]$. За всяка функция $F \in C_0(w)[0, 1]$ и всяко $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено

$$n^{-1} \|w\varphi D^2(U_n^2 F)\| \leq \sqrt{2} \|wF\|.$$

Трябва също така да се отбележи, че за разлика от [15], тук в доказателството на обратната теорема се използва втора итерация на оператора ($U_n^2 f = U_n U_n f$). Причината е, че при използване на първа итерация, константата в неравенството на Бернщайн е по-голяма от 4, а константата в неравенството на Вороновская е от порядък $\frac{1}{4}$. Тогава произведението на тези две константи е по-голямо от 1, а това прави невъзможно получаването на обратна теорема.

3. Теглови приближения с модифициран по Гудман–Шарма оператор на Баскаков. Това са резултатите от съвместната ни с К. Иванов работа [12].

През 1957 В. А. Баскаков [2] въвежда линейния положителен оператор

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right)$$

за приближаване на ограничена и непрекъсната в $[0, \infty)$ функция f , където $P_{n,k}(x) = \binom{n+k-1}{k} x^k (1+x)^{-n-k}$, $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ са базисните функции на Баскаков.

Модификацията по Гудман–Шарма на оператора на Баскаков се дефинира за всяко естествено n като

$$V_n f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x) v_{n,k}(f)$$

$$v_{n,0}(f) = f(0); \quad v_{n,k}(f) = (n+1) \int_0^{\infty} P_{n+2,k-1}(y) f(y) dy, \quad k \in \mathbb{N},$$

където f е измерима по Лебег в $(0, \infty)$ и е с крайна граница $f(+0)$. Операторът V_n е въведен през 2005 от Золтан Финта в [6].

Разглеждаме теглови функции

$$(3.1) \quad w(x) = w(\gamma_0, \gamma_{\infty}; x) = \left(\frac{x}{1+x} \right)^{\gamma_0} (1+x)^{\gamma_{\infty}} \text{ за } x \in [0, \infty) \text{ и } \gamma_0, \gamma_{\infty} \in [-1, 0].$$

С $\psi(x) = x(1+x)$ означаваме естествено свързаното с вторите производни на операторите от тип на Баскаков тегло. Производните означаваме с $D = \frac{d}{dx}$.

С $C[0, \infty)$ означаваме класа на непрекъснатите в $[0, \infty)$ функции. За функциите от $C[0, \infty)$ не изискваме ограниченост или равномерна непрекъснатост. Нека $L_{\infty}[0, \infty)$ е пространството от измеримите по Лебег и съществено ограничени в $[0, \infty)$

функции с равномерната норма $\|\cdot\|$. За теглото w дефинираме $C(w) = \{f \in C[0, \infty) : wf \in L_\infty[0, \infty)\}$ и

$$W^2(w\psi) = \{g, g' \in AC_{loc}(0, \infty) : w\psi D^2g \in L_\infty[0, \infty)\},$$

където $AC_{loc}(0, \infty)$ се състои от абсолютно непрекъснатите в $[a, b]$ функции за всеки интервал $[a, b] \subset (0, \infty)$.

Нека $C_0(w) = \{f \in C(w) : f(0) = 0\}$. По същия начин с $W_0^2(w\psi)$ означаваме подмножеството на $W^2(w\psi)$ от функции g удовлетворяващи допълнително условието

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \psi(x) D^2g(x) = 0.$$

Тегловите приближения с оператора V_n се оценяват с K -функционала между тегловите пространства $C(w)$ и $W^2(w\psi)$, който за всяка функция

$$f \in C(w) + W^2(w\psi) = \{f_1 + f_2 : f_1 \in C(w), f_2 \in W^2(w\psi)\}$$

и $t > 0$ се дефинира чрез

$$K_w(f, t) = \inf \{ \|w(f - g)\| + t \|w\psi D^2g\| : g \in W^2(w\psi), f - g \in C(w) \}.$$

Горната формула е стандартната дефиниция на K -функционал в интерполационната теория. В теорията на апроксимациите обаче, условието $f - g \in C(w)$ обикновено се пропуска, защото в преобладаващата част от случаите второто интерполационно пространство се съдържа в първото. Изследването на операторите от тип на Баскаков обаче води до интерполиране между $C(w)$ и $W^2(w\psi)$, като $W^2(w\psi) \setminus C(w)$ е с безкрайна размерност за някои тегла w удовлетворяващи условията на Теорема 3.1, т.е. $w(x) = w(\gamma_0, \gamma_\infty)$ с $\gamma_0, \gamma_\infty \in [-1, 0]$.

Ако $-1 < \gamma_\infty < 0$ и $\gamma_0 \in [-1, 0]$, тогава всяка $f \in W^2(w\psi)$ може да се представи като $f(x) = Ax + B + F(x)$, където $A = f'(\infty) := f'(1) + \int_1^\infty f''(u) du$, $B = f(0)$, $F(x) = -\int_0^x \int_y^\infty f''(u) du dy$ и $F \in C(w)$. От тук $W^2(w\psi) \subset C(w) + \pi_1$ и $C(w) + W^2(w\psi) = C(w) + \pi_1$, където π_1 е множеството от всички алгебрични полиноми от степен 1. Да отбележим, че π_1 е нулевото пространство на оператора D^2 .

Ако обаче $\gamma_\infty = 0$ или $\gamma_\infty = -1$ пространството $C(w) + W^2(w\psi)$ е съществено по-широко от $C(w) + \pi_1$. Така ако $f(x) = x/e$ за $x \in [0, e]$ и $f(x) = \log x$ за $x \in [e, \infty)$, тогава $f \in (C(w) + W^2(w\psi)) \setminus (C(w) + \pi_1)$ за $\gamma_\infty = 0$ и $\gamma_0 \in [-1, 0]$. По същия начин, ако $f(x) = x^2/e$ за $x \in [0, e]$ и $f(x) = x \log x$ за $x \in [e, \infty)$, тогава $f \in (C(w) + W^2(w\psi)) \setminus (C(w) + \pi_1)$ за $\gamma_\infty = -1$ и $\gamma_0 \in [-1, 0]$. Непразнотата на $(C(w) + W^2(w\psi)) \setminus (C(w) + \pi_1)$ се определя от ръста на $\psi(x)$ като x^2 на безкрайност. По този показател операторите от тип на Баскаков съществено се отличават от тези на Гудман-Шарма, за които винаги $C(w) + W^2(w\psi) = C(w) + \pi_1$ (със съответните за крайния интервал тегла).

Основният резултат в [12] е Теорема 3.1, съдържаща права и силна обратна теорема от вид А

Теорема 3.1 [12, Теорема 1.1]. *Нека $w = w(\gamma_0, \gamma_\infty)$ е зададено с (3.1). Тогава за всяка $f \in C(w) + W^2(w\psi)$ и всяко $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, е в сила*

$$\|w(f - V_n f)\| \leq 2K_w \left(f, \frac{1}{2n} \right) \leq 13.7 \|w(f - V_n f)\|.$$

В работата са получени аналози на всички основни свойства на оператора на Гудман-Шарма:

- запазване на линейните функции;
- комутиране със себе си:

Теорема 3.2 [12, Теорема 2.6]. Нека $f \in C(w(0, \gamma_\infty))$ и $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > -\gamma_\infty - 1$, тогава $V_n V_m f = V_m V_n f$;

- комутиране с диференциалния оператор φD^2 :

Теорема 3.3 [12, Теорема 2.5]. За всяка $f \in W^2(w(0, \gamma_\infty)\psi)$ и всяко $n \in \mathbb{N}$, $n > -\gamma_\infty - 1$ имаме

$$\psi(x)D^2(V_n g)(x) = V_n(\psi D^2 g)(x), \quad x \in [0, \infty);$$

- представянето в

Лема 3.1 [12, Лема 2.2]. За всяка $f \in C(w(0, \gamma_\infty))$ и всяко $n \in \mathbb{N}$, $n > -\gamma_\infty - 1$ имаме

$$V_n f(x) - V_{n+1} f(x) = \frac{1}{n(n+1)} \psi(x) D^2(V_n f)(x).$$

В хода на доказателството на обратната теорема също така са доказани неравенство от тип на Вороновская с „чиста“ константа $\frac{1}{4}$:

Лема 3.2 [12, Лема 4.2]. Нека w^{-1} е вдлъбната. Тогава за всяка функция $g \in W_0^2(w\psi)$, такава, че $\psi D^2 g \in W^2(w\psi)$ и за всяко $n \in \mathbb{N}$:

$$\left\| w \left(V_n g - g - \frac{1}{n} \psi D^2 \left(\frac{g + V_n g}{2} \right) \right) \right\| \leq \frac{1}{4n^2} \|w\psi D^2(\psi D^2 g)\|$$

и особено същественото за тегловата апроксимация неравенство от тип на Бернщайн

Лема 3.3 [12, Лема 4.3]. Нека $w = w(\gamma_0, \gamma_\infty)$ е зададено като в (3.1) с $\gamma_0, \gamma_\infty \in [-1, 0]$. Тогава, за всяка функция $F \in C_0(w)$ и за всяко $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ е изпълнено

$$\frac{1}{n} \|w\psi D^2(V_n^2 F)\| \leq \frac{5}{3} \|wF\|.$$

4. Теглови приближения с модифициран по Гудман–Шарма оператор на Майер–Кьоних и Целер. Това са резултатите от съвместната ни с К. Иванов работа [13].

Операторът на Майер–Кьоних и Целер (МКЗ) (въведен през 1960 година [14]) в леко изменения от Е. У. Чини и А. Шарма вид [3] се дефинира за $f \in C[0, 1]$ чрез

$$M_n^{[MKZ]} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{k+n}\right), \quad x \in [0, 1),$$

където $P_{n,k}(x) = \binom{n+k}{k} x^k (1-x)^{n+1}$ са базисните функции на Майер–Кьоних и Целер. Този оператор е съществено изследван от много автори. Редица прави и обратни теореми са доказани (например в [16]).

Следвайки Дюрмайер, много автори въвеждат и изследват интегрални модификации на МКЗ операторите. М. Хайлман [9, 10] и У. Абел, В. Гупта и М. Иван [1]

унифицират тези модификации в обща фамилия от оператори в която коефициентите пред базисните функции се разглеждат като скалярни произведения с тегло.

Модифицираният по Гудман—Шарма оператор на Майер—Кьоних и Целер (GS-MKZ) въведен и изследван в [13] се дефинира за естествено n чрез

$$M_n f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x) u_{n,k}(f),$$

$$u_{n,0}(f) = f(0), \quad u_{n,k}(f) = n \int_0^1 P_{n,k-1}(y) f(y) \frac{dy}{(1-y)^2},$$

където f е интегрируема по Лебег в $(0, 1)$ функция с крайни граница $f(+0)$.

При дефинирането на GS-MKZ ние следвахме идеята на Гудман и Шарма [7, 8] за интегрална модификация на оператора на Бернщайн, запазваща линейните функции.

Тук с $\varphi(x) = x(1-x)^2$ означаваме теглото, което е естествено свързано с вторите производни на MKZ и GS-MKZ операторите. Тегловите функции които разглеждаме са

$$(4.1) \quad w(x) = w(\alpha_0, \alpha_1; x) = x^{\alpha_0} (1-x)^{\alpha_1}, \quad x \in (0, 1), \quad \text{за } x \in (0, 1) \text{ и } \alpha_0, \alpha_1 \in [-1, 0].$$

Нека $C_0(w)[0, 1] = \{f \in C(w)[0, 1] : f(0) = 0\}$ и $W_0^2(w\varphi)[0, 1]$ са подпространствата на $W^2(w\varphi)[0, 1]$ от функции g удовлетворяващи допълнително

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \varphi(x) D^2 g(x) = 0.$$

Тегловото приближение $\|w(f - M_n f)\|$ с M_n се сравнява с К-функционала между тегловите пространства $C(w)$ и $W^2(w\varphi)$, който за всяка

$$f \in C(w)[0, 1] + W^2(w\varphi)[0, 1] = \{f_1 + f_2 : f_1 \in C(w)[0, 1], f_2 \in W^2(w\varphi)[0, 1]\}$$

и $t > 0$ се дефинира с

$$K_w(f, t)_{[0,1]} = \inf_{g \in W^2(w\varphi), f-g \in C(w)} \{ \|w(f - g)\|_{[0,1]} + t \|w\varphi D^2 g\|_{[0,1]} \}.$$

Основният резултат в [13] е Теорема 4.1, съдържаща права и силна обратна теорема от вид А

Теорема 4.1 [13, Теорема 1.1]. *Нека $w = w(\alpha_0, \alpha_1)$ е зададено с (4.1). Тогава, за всяка $f \in C(w)[0, 1] + W^2(w\varphi)[0, 1]$ и всяко $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, имаме*

$$\|w(f - M_n f)\|_{[0,1]} \leq 2 K_w(f, 1/(2n))_{[0,1]} \leq 13.7 \|w(f - M_n f)\|_{[0,1]}.$$

Резултатите първоначално бяха получени чрез аналогични методи на използваните в [11] и [12]. Впоследствие обаче получих съществено различна от предложената от В. Тотик [16] трансформация между оператори от тип на Баскаков и оператори от тип на Майер—Кьоних и Целер, която изпраща операторите запазващи линейните функции в оператори запазващи линейните функции.

При дефиницията на тази трансформация обектите дефинирани в $[0, \infty)$ отбелязваме с тилда. Използваме стандартната за случая смяна на променливите $\sigma : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$:

$$\tilde{x} = \sigma(x) = \frac{x}{1-x}.$$

Тогава, обратната смяна $\sigma^{-1} : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ е

$$x = \sigma^{-1}(\tilde{x}) = \frac{\tilde{x}}{1 + \tilde{x}}.$$

Функция $\tilde{f}$ дефинирана в $[0, \infty)$ трансформираме във функция f дефинирана в $[0, 1)$ чрез

$$(4.2) \quad f(x) = \mathcal{T}(\tilde{f})(x) = \lambda(x)(\tilde{f} \circ \sigma)(x), \quad \lambda(x) = 1 - x.$$

Обратната трансформация е

$$\tilde{f}(\tilde{x}) = \mathcal{T}^{-1}(f)(\tilde{x}) = \frac{1}{(\lambda \circ \sigma^{-1})(\tilde{x})}(f \circ \sigma^{-1})(\tilde{x}).$$

За тегловите функции (с цел запазване на произведението на тегло и функция) трансформацията и нейната обратна са:

$$w(x) = \mathcal{S}(\tilde{w})(x) = \frac{1}{\lambda(x)}(\tilde{w} \circ \sigma)(x)$$

и

$$\tilde{w}(\tilde{x}) = \mathcal{S}^{-1}(w)(\tilde{x}) = (\lambda \circ \sigma^{-1})(\tilde{x})(w \circ \sigma^{-1})(\tilde{x}).$$

С помощта на трансформация (4.2) резултатите от [12] се пренесоха за GS-MKZ операторите и съвпаднаха с предварително получените. Въпросната трансформация би могла да се използва за пренасянето на много от известните резултати за оператори от единия тип в резултати за другия. Така например, резултатите на В.Тотик за MKZ операторите могат да се пренесат за класическия оператор на Баскаков.

Не на последно място трансформацията дава и съвсем ясно обяснение, защо параметрите на теглото γ_0, γ_∞ са в интервала $[-1, 0]$ при операторите в [12]. Интервалите за параметрите при крайните интервали т.е. [11] и [13] са съвсем естествени, докато при [12] първоначално изглежда, че причината е защото за тези параметри се получават резултати.

Тук е мястото да споменем, че теглови приближения се разглеждат както за отрицателни параметри, така и за положителни. Използването на отрицателните параметри (за крайни интервали) ни дава възможност не само да отчетем, че в краищата на интервала имаме нула за грешката, но и да отчетем какъв е порядъка на тази нула без да „разваляме“ информацията за вътрешността на интервала.

REFERENCES

- [1] U. ABEL, V. GUPTA, M. IVAN. The Complete Asymptotic Expansion for a General Durrmeyer Variant of the Meyer-König and Zeller operators. *Mathematical and Computing Modeling*, **40** (2004), 867–875.
- [2] V. A. BASKAKOV. An example of a sequence of the linear positive operators in the space of continuous functions. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **113** (1957), 249–251.
- [3] E. W. CHENEY, A. SHARMA. Bernstein power series. *Canad. J. Math.*, **16** (1964), 241–253.
- [4] R. A. DE VORE, G. G. LORENTZ. Constructive Approximation. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [5] Z. DITZIAN, K. G. IVANOV. Strong Convers Inequalities. *J. d'Analyse Mathématique*, **61** (1991), 61–111.

- [6] Z. FINTA. On converse approximation theorems. *J. Math. Anal. Appl.*, **312** (2005), 159–180.
- [7] T. N. T. GOODMAN, A. SHARMA. A Bernstein-type Operator on the Simplex. *Mathematica Balcanica (new series)* **5** (1991), Fask. 2, 129–145.
- [8] T. N. T. GOODMAN, A. SHARMA. A Modified Bernstein-Shoenberg Operator. Proc. of Conference on Constructive Theory of Functions, Varna’87, Publ. House of Bulg. Acad. of Sci., Sofia, 1987, 166–173.
- [9] M. HEILMANN. Eigenfunctions of Durmeyer-type modifications of Meyer-König and Zeller and Baskakov operators. *J. Approx. Theory*, **125** (2003), 63–73.
- [10] M. HEILMANN. Eigenfunctions and Eigenvalues for Some Durmeyer-Type Operators. In: Constructive Theory of Functions (Ed. B. D. Bojanov) Varna 2005, Marin Drinov Academic Publishing House, Sofia, 2006 158–167.
- [11] K. G. IVANOV, P. E. PARVANOV. Weighted Approximation by the Goodman-Sharma Operators. *East Journal on Approximations*, **15** (2009), No 4, 473–486.
- [12] K. G. IVANOV, P. E. PARVANOV. Weighted Approximation by Baskakov-Type Operators. *Acta Math. Hungar.*, (to appear).
- [13] K. G. IVANOV, P. E. PARVANOV. Weighted Approximation by Meyer-König and Zeller-Type Operators. CTF-2010, Sozopol, Bulgaria, (submitted to *A Volume on Approximation Theory*, dedicated to Borislav Bojanov).
- [14] W. MEYER-KÖNIG, K. ZELLER. Bernsteinsche Potenzreihen. *Studia Math.*, **19** (1960), 89–94.
- [15] P. E. PARVANOV, B. D. POPOV. The limit case of Bernstein’s operators with Jacobi-weights. *Mathematica Balcanica (new series)*, **8** (1994), Fask. 2–3, 165–177.
- [16] V. TOTIK. Uniform approximation by Baskakov and Meyer-König and Zeller operators. *Period. Math. Hungar.*, **14** (1983), Nos 3–4, 209–228.

Parvan E. Parvanov
 Department of Mathematics and Informatics
 University of Sofia
 5, James Bourchier Blvd
 1164 Sofia, Bulgaria
 e-mail: pparvan@fmi.uni-sofia.bg

WEIGHTED APPROXIMATION BY THE GOODMAN-SHARMA-TYPE OPERATORS

P. E. Parvanov

The uniform weighted approximation errors of the Goodman-Sharma operators are characterized for functions from $C(w)[0, 1]$ with weight of the form $x^{\gamma_0}(1-x)^{\gamma_1}$ for $\gamma_0, \gamma_1 \in [-1, 0]$. The results extends those in [15] from the unweighted case ($\gamma_0 = \gamma_1 = 0$) to weights with negative powers.

The uniform weighted approximation errors of Baskakov-type operators are characterized for weights of the form $\left(\frac{x}{1+x}\right)^{\gamma_0} (1+x)^{\gamma_\infty}$ for $\gamma_0, \gamma_\infty \in [-1, 0]$.

The uniform weighted approximation errors of a Goodman-Sharma variant of the Meyer-König and Zeller operators are characterized for the weights of the form $w(x) = x^{\alpha_0}(1-x)^{\alpha_1}$ for $\alpha_0, \alpha_1 \in [-1, 0]$. Direct and strong converse theorems of type A are proved in terms of the weighted K -functional.