*МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2012*
*MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2012*
*Proceedings of the Forty First Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians*
*Borovetz, April 9–12, 2012*

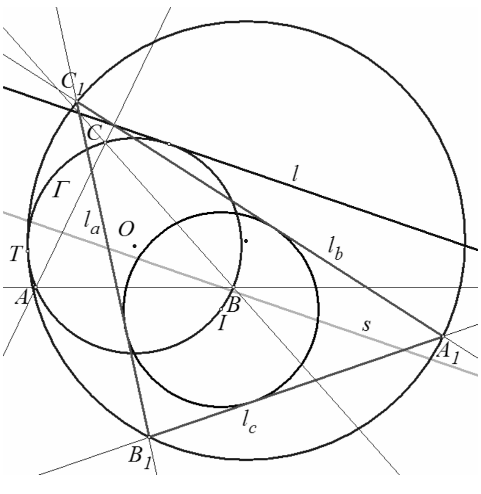
# ЕДНА ЗАБЕЛЕЖИТЕЛНА ТОЧКА НА ТРИЪГЪЛНИКА

**Сава Гроздев, Веселин Ненков**

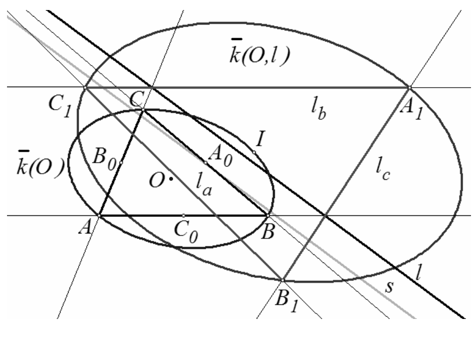
С помощта на една от задачите от Международната олимпиада по математика през 2011 г. е открита една нова забележителна точка за триъгълник. Доказани са различни свойства на тази точка и са намерени аналози на твърдението от олимпиадната задача, свързани с конични сечения и хармонично спрегнати прави.

Една от най-интересните задачи на 52-та международна олимпиада по математика през т.г. в Холандия е задача 6 (японско предложение) [1]. Задачата е следната:

*Нека $l$ е допирателна към описаната окръжност $\Gamma$ на остроъгълен $\Delta ABC$. С $l_a$, $l_b$ и $l_c$ са означени симетричните прави на $l$ съответно спрямо правите $BC$, $CA$ и $AB$. Да се докаже, че описаната окръжност около триъгълника, образуван при пресичането на $l_a$, $l_b$ и $l_c$, се допира до $\Gamma$.* (Фиг. 1)



Фиг. 1



Фиг. 2

Оказва се, че определената в задачата конфигурация е изключително богата. Нека $O$ е центърът на $\Gamma$, а $l_b \cap l_c = A_1$, $l_c \cap l_a = B_1$ и $l_a \cap l_b = C_1$. С $I$ означаваме центъра на вписаната окръжност за $\Delta A_1B_1C_1$, а с $I_A$, $I_B$ и $I_C$ – центровете на външно вписаните за $\Delta A_1B_1C_1$ окръжности, лежащи съответно в ъглите с върхове $A_1$, $B_1$ и $C_1$. Забележителен факт е, че точката $I$ лежи върху $\Gamma$ (Фиг. 1). Нещо повече, ако се откажем от свойството на $l$ да е допирателна, този факт остава в сила за произволна права $l$ от равнината на $\Delta ABC$ (доказателството е изложено подолу). Именно точката $I$ е новооткритата точка. В случай, че $\Delta ABC$ е тъпоъгълен, върху $\Gamma$ лежи тази от точките $I_A$, $I_B$ и $I_C$, която съответства на тъпия ъгъл на $\Delta ABC$. Така, използвайки въведените означения, получаваме следното:

**Твърдение 1.** *За произволна права $l$ от равнината на даден $\Delta ABC$ точно един от центровете $I$, $I_A$, $I_B$ и $I_C$ на вписаните в $\Delta A_1B_1C_1$ окръжности лежи върху $\Gamma$.*

В по-нататъшните разглеждания използваме барицентрични координати спрямо дадения $\Delta ABC$, като $A\,(1,0,0)$, $B\,(0,1,0)$ и $C\,(0,0,1)$ [2]. С $A_0\left(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, $B_0\left(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2}\right)$ и $C_0\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$ означаваме средите съответно на страните $BC$, $CA$ и $AB$. Аналогично разглеждаме барицентрични координати и спрямо $\Delta A_1B_1C_1$, като $A_1\,(1,0,0)$, $B_1\,(0,1,0)$ и $C_1\,(0,0,1)$. Валидно е следното:

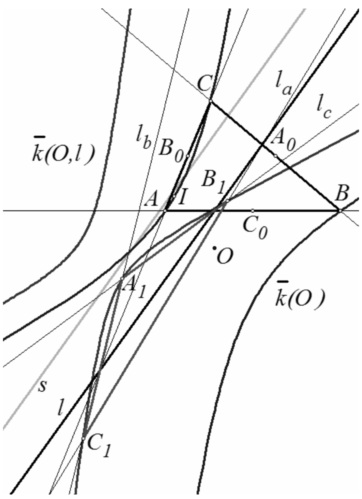
**Твърдение 2.** *Координатите спрямо $\Delta A_1B_1C_1$ на тази от точките $I$, $I_A$, $I_B$ и $I_C$, която лежи върху $\Gamma$, съвпадат с координатите на $O$ спрямо $\Delta ABC$.*

Преди да докажем горните две твърдения, ще посочим обобщение на формулираната в началото олимпиадна задача. Откриването на споменатите факти, както и на следващите, е осъществено с помощта на програмата “THE GEOMETER’S SKETCHPAD” (GSP). В търсенето на обобщение е естествено да заменим окръжността $\Gamma$ с крива от втора степен, описана около даден (не задължително остроъгълен) $\Delta ABC$. Означаваме центъра на такава крива отново с $O$, а самата крива – с $\bar{k}\,(O)$. Ясно е, че $\bar{k}\,(O)$, а следователно и $O$, подлежи на специализация. Възможно е и обратното – най-напред да изберем $O$, а след това да определим $\bar{k}\,(O)$ от условието кривата да е описана около $\Delta ABC$. От разсъжденията по-долу следва, че е удобно да се тръгне от специализация на $O$.

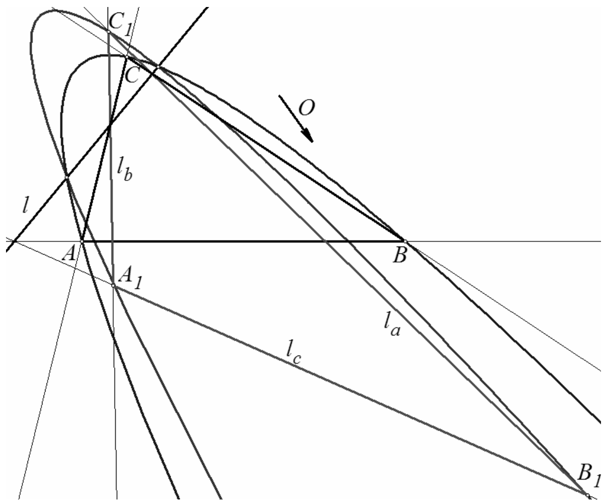
Нека $l$ е произволна права от равнината на $\Delta ABC$ и нека $l$ пресича правите $BC$, $CA$ и $AB$ съответно в точките $A'$, $B'$ и $C'$. Ако $l_a$ е симетричната на $l$ спрямо $BC$, то $BC$ е ъглополовяща (и ос на симетрия) на единия от ъглите между $l$ и $l_a$. Ъглополовящата на другия ъгъл е също ос на симетрия за $l$ и $l_a$ и е успоредна на симетралата на $BC$. Следователно, правата $l_a$ е хармонично спрегната на $l$ спрямо ъглополовящите на ъглите между $l$ и $BC$ в точката $A'$. Това дава основание, когато $O$ е произволна точка от равнината на $\Delta ABC$ ($O$ е център на единствено описано за $ABC$ конично сечение $\bar{k}\,(O)$) да построим права $l'_a$ през точката $A'$, която е успоредна на диаметъра $OA_0$ за $\bar{k}\,(O)$. Сега определяме правата $l_a$ като хармонично спрегнатата на $l$ спрямо $BC$ и $l'_a$. По аналогичен начин чрез точките $B'$ и $C'$ определяме съответно правите $l_b$ и $l_c$. Когато $\bar{k}\,(O) \equiv \Gamma$, така построените прави преминават в правите, симетрични на $l$ спрямо $BC$, $CA$ и $AB$ съответно.

Нека $l_b \cap l_c = A_1$, $l_c \cap l_a = B_1$ и $l_a \cap l_b = C_1$. Ако $O\,(x_0, y_0, z_0)$ е дефинирана с барицентричните си координати спрямо $\Delta ABC$, тя определя крива $\bar{k}\,(O, l)$, описана около $\Delta A_1B_1C_1$. Може да се очаква, че точката $I\,(x_0, y_0, z_0)$, определена спрямо $\Delta A_1B_1C_1$ (както в частния случай, и тук имаме $A_1\,(1,0,0)$, $B_1\,(0,1,0)$ и $C_1\,(0,0,1)$), е център на някаква вписана за $\Delta A_1B_1C_1$ крива, която в частност преминава във вписана окръжност за $\Delta A_1B_1C_1$. Основание, че сме попаднали на правилната точка $I$ дава наблюдението с GSP, което показва, че се получава обобщение на твърдение 1 в следния вид:

**Твърдение 3.** *Точката* $I\,(x_0, y_0, z_0)$, *определена спрямо* $\Delta A_1B_1C_1$, *лежи върху кривата* $\bar{k}\,(O)$. (*Фиг.* 1, 2, 3, 4)




Фиг. 3




Фиг. 4

Вписаната в $\Delta A_1B_1C_1$ крива с център $I$ от своя страна трябва да определя еднозначно крива $\bar{k}\,(O,l)$, описана около $\Delta A_1B_1C_1$. Такава крива, както е показано в [3], се получава чрез спрегнатия триъгълник $I_AI_BI_C$ на $I$ спрямо $\Delta A_1B_1C_1$. По-точно, кривата $\bar{k}\,(O,l)$ минава през средите на отсечките $II_A$, $II_B$, $II_C$, $I_BI_C$, $I_CI_A$ и $I_AI_B$. Така, по точката $I$ еднозначно се определя крива $\bar{k}\,(O,l)$, описана около $\Delta A_1B_1C_1$. По-нататък можем да изследваме разположението на кривите $\bar{k}\,(O)$ и $\bar{k}\,(O,l)$ в зависимост от правата $l$ и да проверим дали наистина се получава обобщение. С помощта на GSP забелязваме, че когато $l$ се допира до $\bar{k}\,(O)$, кривата $\bar{k}\,(O,l)$ се допира до $\bar{k}\,(O)$. Нещо повече, като използваме въведените означения, може да се формулира следното:

**Твърдение 4.** *Ако правата* $l$ *пресича* $\bar{k}(O)$, *допира се до* $\bar{k}(O)$ *или няма общи точки с* $\bar{k}(O)$, *то кривите* $\bar{k}(O,l)$ *и* $\bar{k}(O)$ *имат съответно две крайни общи точки, допират се в една крайна точка или нямат общи крайни точки.* (*Фиг.* 1, 2, 3, 4)

От това твърдение непосредствено получаваме:

**Следствие 1.** *Кривите* $\bar{k}(O)$ *и* $\bar{k}(O,l)$ *се допират в крайна точка точно когато* $l$ *и* $\bar{k}(O)$ *са допирателни.* (*Фиг.* 1)

**Следствие 2.** *Кривите* $\bar{k}(O)$ *и* $\bar{k}(O,l)$ *имат най-много две общи крайни точки.*

В случая, когато $\bar{k}(O)$ е парабола, е изпълнено следното:

**Твърдение 5.** *Ако* $\bar{k}(O)$ *е парабола и* $l$ *има обща точка* $P$ *с нея, то* $P$ *лежи и върху* $\bar{k}(O,l)$. (*Фиг.* 4)

Наблюденията върху взаимното разположение на кривите $\bar{k}(O)$ и $\bar{k}(O, l)$ дават основание и за следното:

**Твърдение 6.** *Кривите $\bar{k}(O)$ и $\bar{k}(O, l)$ са хомотетични.* (*Фиг.* 1, 2, 3, 4)

От това твърдение непосредствено получаваме:

**Следствие 3.** *Кривите $\bar{k}(O)$ и $\bar{k}(O, l)$ са от един и същи вид.* (*Фиг.* 1, 2, 3, 4)

Преминаваме към доказване на формулираните твърдения. Ако спрямо $\Delta ABC$ точката $O$ има координати $(x_0, y_0, z_0)$, то спрямо $\Delta ABC$ кривата $\bar{k}(O)$ има следното уравнение:

(1) $$\bar{k}\,(O) : (-x_0 + y_0 + z_0)\,x_0 yz + (x_0 - y_0 + z_0)\,y_0 zx + (x_0 + y_0 - z_0)\,xy = 0.$$

Нека правата $l$ има уравнение $ux + vy + wz = 0$ спрямо $\Delta ABC$. Координатите на $A'$, $B'$ и $C'$ са съответно: $A'\left(0, \dfrac{w}{w-v}, \dfrac{v}{v-w}\right)$, $B'\left(\dfrac{w}{w-u}, 0, \dfrac{u}{u-w}\right)$ и $C'\left(\dfrac{v}{v-u}, \dfrac{u}{u-v}, 0\right)$. Да пресечем снопа прави с център $A'$с правата $OA_0$. Тъй като по построение $l'_a \parallel OA_0$, то точките $A'' = l \cap OA_0$ и $A''' = l_a \cap OA_0$ са симетрични спрямо $A_0$. С помощта на уравненията на правите $l$ и $OA_0$ определяме координатите на $A''$:

$$A''\left(\frac{(v+w)x_0}{2l_0{-}(v+w)(x_0+y_0+z_0)}, \frac{ux_0 + w(z_0 - y_0)}{2l_0{-}(v+w)(x_0+y_0+z_0)}, \frac{ux_0 + v(y_0 - z_0)}{2l_0{-}(v+w)(x_0+y_0+z_0)}\right),$$

където $l_0 = ux_0 + vy_0 + wz_0$. От симетрията спрямо $A_0$ следва, че

$$A'''\left(\frac{(v+w)x_0}{2l_0{-}(v+w)(x_0+y_0+z_0)}, \frac{(u-v-w)x_0 + v(y_0 - z_0)}{2l_0{-}(v+w)(x_0+y_0+z_0)}, \frac{(u-v-w)x_0 + w(z_0 - y_0)}{2l_0{-}(v+w)(x_0+y_0+z_0)}\right).$$

Окончателно, с помощта на координатите на $A'$ и $A'''$ намираме уравнението на $l_a$:

(2) $$l_a : (ux_0 + (v+w)\,(x_0 + y_0 + z_0) - 2l_0)\,x + vx_0 y + wx_0 z = 0, \quad l_0 = ux_0 + vy_0 + wz_0.$$

Да отбележим два особени случая за правата $l_a$. Единият се получава, когато $l \parallel BC$. Тогава считаме, че $l_a \parallel BC$ и $l_a$ минава през $A'''$. В случай, че $l \equiv OA_0$, приемаме, че $l_a \equiv OA_0$. Тези случаи се съгласуват напълно със съответните случаи при осева симетрия. Провеждането на необходимите пресмятания показва, че сега уравнението на $l_a$ отново се изразява с (2). Затова при по-нататъшните пресмятания няма да е необходимо да се разглеждат отделни случаи.

Аналогично на (2) се получават и уравненията на правите $l_b$ и $l_c$:

(3) $$\begin{aligned} l_b &: uy_0 x + (vy_0 + (w+u)\,(x_0 + y_0 + z_0) - 2l_0)\,y + wy_0 z = 0, \\ l_c &: uz_0 x + vz_0 y + (wz_0 + (u+v)\,(x_0 + y_0 + z_0) - 2l_0)\,z = 0. \end{aligned}$$

След решаване на трите системи от по две уравнения, които се получават от (2) и (3), се намират координатите на върховете на $\Delta A_1 B_1 C_1$:

1) Ако $\bar{k}\,(O)$ е елипса или хипербола, т.е. $x_0+y_0+z_0=1$, то

$$A_1\left(\frac{\vartheta+(2x_0-1)\,(l_0-u)\,u}{\vartheta},\frac{(2l_0-u-v)\,uy_0}{\vartheta},\frac{(2l_0-u-w)\,uz_0}{\vartheta}\right),$$

$$B_1\left(\frac{(2l_0-v-u)\,vx_0}{\vartheta},\frac{\vartheta+(2y_0-1)\,(l_0-v)\,v}{\vartheta},\frac{(2l_0-v-w)\,vz_0}{\vartheta}\right),\tag{4}$$

$$C_1\left(\frac{(2l_0-w-u)\,wx_0}{\vartheta},\frac{(2l_0-w-v)\,wy_0}{\vartheta},\frac{\vartheta+(2z_0-1)\,(l_0-w)\,w}{\vartheta}\right),$$

където

$$\begin{aligned}\vartheta&=2l_0^2-2l_0\,(u+v+w)+u^2x_0+v^2y_0+w^2z_0+vw+wu+uv\\&=2l_0^2-l_0\,(u+v+w)+vwx_0+wuy_0+uvz_0;\end{aligned}$$

2) Ако $\bar{k}(O)$ е парабола, т.е. $x_0+y_0+z_0=0$, то

$$A_1\left(\frac{l_0+ux_0}{l_0},\frac{uy_0}{l_0},\frac{uz_0}{l_0}\right),\ B_1\left(\frac{vx_0}{l_0},\frac{l_0+vy_0}{l_0},\frac{wz_0}{l_0}\right),\ C_1\left(\frac{wx_0}{l_0},\frac{wy_0}{l_0},\frac{l_0+wz_0}{l_0}\right).\tag{5}$$

От (4) и (5) получаваме съответно:

**Следствие 4.** *Ако $\bar{k}(O)$ е елипса или хипербола, лицата $S_{ABC}$ и $S_{A_1B_1C_1}$ съответно на $\Delta ABC$ и $\Delta A_1B_1C_1$ са свързани с формулата*

$$S_{A_1B_1C_1}=\frac{(2l_0-u-v-w)^2}{\vartheta}S_{ABC}.$$

**Следствие 5.** *Ако $\bar{k}(O)$ е парабола, лицата $S_{ABC}$ и $S_{A_1B_1C_1}$, съответно на $\Delta ABC$ и $\Delta A_1B_1C_1$, са свързани с формулата $S_{A_1B_1C_1}=2S_{ABC}$.*

Нека произволна точка има координати $(x,y,z)$ спрямо $\Delta ABC$ и координати $(x',y',z')$ спрямо $\Delta A_1B_1C_1$. Тогава

$$\begin{aligned}x&=x_{A_1}x+x_{B_1}y+x_{C_1}z,\\y&=y_{A_1}x+y_{B_1}y+y_{C_1}z,\quad [2,\text{ с. }90–91]\\z&=z_{A_1}x+z_{B_1}y+z_{C_1}z.\end{aligned}\tag{6}$$

Сега от (1), (4), (5) и (6) следва, че уравнението на $\bar{k}(O)$ спрямо $\Delta A_1B_1C_1$ във всички случаи може да се запише по следния начин:

$$\bar{k}\,(O):\ \begin{aligned}&(2l_0-(u+v+w)(x_0+y_0+z_0))(x_0^2y'z'+y_0^2z'x'+z_0^2x'y')\\&+(x'+y'+z')(u(-x_0+y_0+z_0)y_0z_0x'+v(x_0-y_0+z_0)z_0x_0y'\\&+w(x_0+y_0-z_0)x_0y_0z')=0.\end{aligned}\tag{7}$$

След заместване на координатите на $I(x_0,y_0,z_0)$ в (7) установяваме, че $I\in\bar{k}(O)$. Това доказва твърдение 3. Следователно, ако е вярно твърдение 1, то е вярно и твърдение 2.

Според резултатите, получени в [3], уравнението на $\bar{k}(O,l)$ спрямо $\Delta A_1B_1C_1$ може да се запише във вида:

$$\bar{k}\,(O,l):\ x_0^2y'z'+y_0^2z'x'+z_0^2x'y'=0.\tag{8}$$

Ако $\bar{k}(O)$ има безкрайна точка $(x',y',z')$, то $x'+y'+z'=0$ и уравнението (7) в този случай се редуцира до (8). Следователно, всяка безкрайна точка на $\bar{k}(O)$ принадлежи и на $\bar{k}(O,l)$. Оттук получаваме и доказателство на Следствие 3. Ако

$\bar{k}(O)$ и $\bar{k}(O,l)$ имат обща крайна точка $(x', y', z')$, то $x' + y' + z' = 1$ и от (7) и (8) следва, че тази точка лежи на правата $r$ с уравнение

$$(9) \quad r : u\,(-x_0 + y_0 + z_0)\,y_0 z_0 x' + v\,(x_0 - y_0 + z_0)\,z_0 x_0 y' + w\,(x_0 + y_0 - z_0)\,x_0 y_0 z' = 0.$$

Оттук изразяваме $z'$, заместваме го в (8) и получаваме

$$(10) \quad \begin{aligned} &u\,(-x_0 + y_0 + z_0)\,y_0^3 x'^2 + v\,(x_0 - y_0 + z_0)\,x_0^3 y'^2 \\ &+x_0 y_0\,(u\,(-x_0 + y_0 + z_0)\,x_0 + v\,(x_0 - y_0 + z_0)\,y_0 - w\,(x_0 + y_0 - z_0)\,z_0)\,x' y' = 0. \end{aligned}$$

Последното разглеждаме като квадратно уравнение за $y'/x'$. Броят на реалните корени зависи от знака на израза

$$(11) \quad \begin{aligned} &D = u^2(-x_0 + y_0 + z_0)^2 x_0^2 + v^2(x_0 - y_0 + z_0)^2 y_0^2 \\ &+w^2(x_0 + y_0 - z_0)^2 z_0^2 - 2vw(x_0 - y_0 + z_0)(x_0 + y_0 - z_0)y_0 z_0 \\ &-2wu(x_0 + y_0 - z_0)(-x_0 + y_0 + z_0)z_0 x_0 - 2uv(-x_0 + y_0 + z_0)(x_0 - y_0 + z_0)x_0 y_0. \end{aligned}$$

Следователно, знакът на израза $D$ от (11) определя броя на общите крайни точки на $\bar{k}(O)$ и $\bar{k}(O,l)$. От друга страна, от уравнението на $l$ и (1) след елиминиране на $z$ се получава уравнение, подобно на (10). Броят на реалните корени на това уравнение отново зависи само от знака на $D$ от (11). Така получаваме, че броят на общите точки на $l$ и $\bar{k}(O)$ съвпада с броя на общите крайни точки на $\bar{k}(O)$ и $\bar{k}(O,l)$. С това Твърдение 4 е доказано.

За да докажем Твърдение 5, заместваме резултатите от (5) и (6) в (9) и получаваме, че правата $r$ спрямо $\Delta ABC$ има уравнение $r : ux + vy + wz = 0$. Следователно $r \equiv g$. Това доказва Твърдение 5.

В доказателството на Твърдение 6 използваме следното помощно твърдение

**Лема.** *Ако триъгълниците $A_1B_1C_1$ и $\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1$ са такива, че $B_1C_1 \parallel \bar{B}_1\bar{C}_1$, $C_1A_1 \parallel \bar{C}_1\bar{A}_1$ и $A_1B_1 \parallel \bar{A}_1\bar{B}_1$, то барицентричните координати на техния перспективен център спрямо $\Delta\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1$ са равни на съответните му барицентрични координати спрямо $\Delta A_1B_1C_1$.*

Сега да определим координатите $(x_I, y_I, z_I)$ на $I$ спрямо $\Delta ABC$. Ако $\bar{k}(O)$ е парабола, от (5) и (6) следва, че $I \equiv O$. Когато $\bar{k}(O)$ не е парабола, от (4) и (6) получаваме равенствата

$$(12) \quad \begin{gathered} x_I = \frac{(2l_0 - u - v)\,(2l_0 - u - w)\,x_0}{\vartheta}, \quad y_I = \frac{(2l_0 - v - u)\,(2l_0 - v - w)\,y_0}{\vartheta}, \\ z_I = \frac{(2l_0 - w - u)\,(2l_0 - w - v)\,z_0}{\vartheta}. \end{gathered}$$

Нека $\bar{l}$ е произволна права, успоредна на $l$, и $\Delta\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1$ е породеният от нея триъгълник. Лесно се вижда, че $B_1C_1 \parallel \bar{B}_1\bar{C}_1$, $C_1A_1 \parallel \bar{C}_1\bar{A}_1$ и $A_1B_1 \parallel \bar{A}_1\bar{B}_1$. Следователно за $\Delta A_1B_1C_1$ и $\Delta\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1$ е приложима лемата.

Ако $\bar{l}$ има уравнение $\bar{u}x + \bar{v}y + \bar{w}z = 0$, то $\dfrac{\bar{v} - \bar{w}}{v - w} = \dfrac{\bar{w} - \bar{u}}{w - u} = \dfrac{\bar{u} - \bar{v}}{u - v} = \delta$. Без ограничение можем да смятаме, че $\bar{w} = w$. Лесно се вижда, че $\bar{u} = \delta u + (1 - \delta)w$, $\bar{v} = \delta v + (1 - \delta)w$, $\bar{l}_0 = \delta l_0 + (1 - \delta)w$ и $\bar{\vartheta} = \delta^2\vartheta$. Сега, ако $\bar{I}$ е точката, която има координати $(x_0, y_0, z_0)$ спрямо $\Delta\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1$, то за координатите ѝ $(x_{\bar{I}}, y_{\bar{I}}, z_{\bar{I}})$ спрямо $\Delta ABC$ от (4) и (6) се получават равенствата $x_{\bar{I}} = x_I$, $y_{\bar{I}} = y_I$ и $z_{\bar{I}} = z_I$. Следователно, $\bar{I} \equiv I$. Така от лемата получаваме, че $I$ е центърът на перспективност за $\Delta A_1B_1C_1$ и $\Delta\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1$. Освен това, $I$ е център на хомотетия $\bar{h}$ за тези триъгълници. Освен върховете на $\Delta A_1B_1C_1$ и $\Delta\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1$, хомотетията $\bar{h}$ преобразува една в друга и средите на страните на спрегнатите за $I$ триъгълници спрямо $\Delta A_1B_1C_1$ и $\Delta\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1$. Но тези две шесторки съответни точки лежат върху кривите $\bar{k}(O,l)$ и $\bar{k}(O,\bar{l})$. Следователно, $\bar{h}$ е хомотетия за $\bar{k}(O,l)$ и $\bar{k}(O,\bar{l})$. Сега, ако $\bar{l}$ е допирателна за $\bar{k}(O)$, и $\bar{k}(O,\bar{l})$ е хомотетична на $\bar{k}(O)$, ще следва, че $\bar{k}(O,l)$ е хомотетична с $\bar{k}(O)$. Затова е достатъчно да докажем, че $\bar{k}(O,l)$ и $\bar{k}(O)$ са хомотетични, когато са допирателни.

Нека $\bar{k}(O,l)$ и $\bar{k}(O)$ се допират в точка $T(x'_T,y'_T,z'_T)$ (координатите са спрямо $\Delta A_1B_1C_1$) и $\overrightarrow{g}(\alpha,\beta,\gamma)(\alpha+\beta+\gamma=0)$ е произволен вектор. Нека правата $g: x'=x'_T+\alpha t,\ y'=y'_T+\beta t,\ z'=z'_T+\gamma t$ пресича повторно $\bar{k}(O)$ и $\bar{k}(O,l)$ съответно в точки $T_1$ и $T_2$. Точките $T_1$ и $T_2$ се получават съответно при $t=t_1$ и $t=t_2$. Тогава $\overrightarrow{TT_1}=\dfrac{t_1}{t_2}\overrightarrow{TT_2}$. Параметрите $t_1$ и $t_2$ определяме, като заместим уравненията на $g$ съответно в (7) и (8). За отношението им получаваме

$$(13)\quad \frac{t_1}{t_2}=1+\frac{u(-x_0+y_0+z_0)y_0z_0\alpha+v(x_0-y_0+z_0)z_0x_0\beta+w(x_0+y_0-z_0)x_0y_0\gamma}{(2l-(u+v+w)(x_0+y_0+z_0))((y'_Tz_0^2+z'_Ty_0^2)\alpha+(z'_Tx_0^2+x'_Tz_0^2)\beta+(x'_Ty_0^2+y'_Tx_0^2)\gamma)}.$$

От (10) и (9) имаме $y'_T=-\dfrac{y_0d_zx'_T}{2vx_0^2\left(x_0-y_0+z_0\right)}$ и $z'_T=-\dfrac{z_0d_yx'_T}{2wx_0^2\left(x_0+y_0-z_0\right)}$, където

$$d_y=ux_0\left(-x_0+y_0+z_0\right)-vy_0\left(x_0-y_0+z_0\right)+wz_0\left(x_0+y_0-z_0\right),$$

$$d_z=ux_0\left(-x_0+y_0+z_0\right)+vy_0\left(x_0-y_0+z_0\right)-wz_0\left(x_0+y_0-z_0\right).$$

От (11) при $D=0$ се получава $d_y^2=4wuz_0x_0\left(x_0+y_0-z_0\right)\left(-x_0+y_0+z_0\right)$ и $d_z^2=4uvx_0y_0\left(-x_0+y_0+z_0\right)\left(x_0-y_0+z_0\right)$. Освен това, от (8) следват равенствата

$$y'_Tz_0^2+z'_Ty_0^2=-\frac{y'_Tz'_Tx_0^2}{x'_T},\quad z'_Tx_0^2+x'_Tz_0^2=-\frac{z'_Tx'_Ty_0^2}{y'_T},\quad x'_Ty_0^2+y'_Tx_0^2=-\frac{x'_Ty'_Tz_0^2}{z'_T}.$$

С помощта на изведените резултати преобразуваме (13) във вида:

$$(13')\qquad \frac{t_1}{t_2}=1-\frac{u\left(-x_0+y_0+z_0\right)y_0z_0x'_T}{\left(2l_0-\left(u+v+w\right)\left(x_0+y_0+z_0\right)\right)x_0^2y'_Tz'_T}.$$

Полученият израз не зависи от вектора $\overrightarrow{g}$ и затова $\bar{k}(O)$ се получава от $\bar{k}(O,l)$ при хомотетия с център $T$ и коефициент $t_1/t_2$. С това Твърдение 6 е доказано.

В случая, когато $x_0+y_0+z_0=0$, от $(13')$ получаваме $t_1/t_2=2$, т.е. в сила е интересното

**Следствие 6.** *Ако $\bar{k}(O)$ и $\bar{k}(O,l)$ са параболи, то $\bar{k}(O)$ се получава от $\bar{k}(O,l)$ при хомотетия с коефициент* 2.

Ако $k(I)$ е кривата с център $I$, която е вписана в $\Delta A_1B_1C_1$, както е показано в [4], $\bar{k}(O,l)$ е хомотетична с $k(I)$. Затова от твърдение 6 следва, че $k(I)$ и $\bar{k}(O)$ са хомотетични. Следователно, ако $\bar{k}(O)\equiv\Gamma$, то $k(I)$ е вписана в $\Delta A_1B_1C_1$ окръжност. Това доказва Твърдение 1. С това всички формулирани дотук твърдения са доказани.

Накрая да разгледаме една връзка между точката $I$ и правата $l$, когато $\bar{k}(O)$ е централна крива. Нека $p_a$, $p_b$ и $p_c$ са правите, които минават през произволна точка $P$ от $\bar{k}(O)$ и са съответно успоредни на $OA_0$, $OB_0$ и $OC_0$. Ако $p_a\cap BC=A_P$, $p_b\cap CA=B_P$ и $p_c\cap AB=C_P$, то както е показано в [5], точките $A_P$, $B_P$ и $C_P$ лежат на една права, която наричаме *Симсънова права на точката $P$ спрямо кривата* $\bar{k}(O)$. Тъй като $I$ е точка от $\bar{k}(O)$, тя има Симсънова права спрямо тази крива, а наблюденията с GSP показват, че е в сила следното:

**Твърдение 7.** *Ако $\bar{k}(O)$ е елипса или хипербола, Симсъновата права на $I$ спрямо $\bar{k}(O)$ е успоредна на правата $l$.* (*Фиг.* 1, 2, 3)

За да докажем Твърдение 7, достатъчно е да проверим, че векторът $\overrightarrow{A_I B_I}$ е колинеарен с вектора $\overrightarrow{l}\,(v-w, w-u, u-v)$ (той от своя страна е колинеарен с $l$). От резултатите в [5] и (12) за координатите на $A_I$ и $B_I$ получаваме

$$A_I\left(0, \frac{(u-w)\,(2l_0-u-v)\,(1-2z_0)}{2\vartheta}, \frac{(2l_0-w-u)\,(2l_0-u-v+2\,(u-w)\,z_0)}{2\vartheta}\right),$$

$$B_I\left(\frac{(v-w)\,(2l_0-u-v)\,(1-2z_0)}{2\vartheta}, 0, \frac{(2l_0-v-w)\,(2l_0-u-v+2\,(v-w)\,z_0)}{2\vartheta}\right).$$

Сега лесно се вижда, че $\overrightarrow{A_I B_I} = \dfrac{(2l_0-u-v)(1-2z_0)}{2\vartheta}\overrightarrow{l}$. С това Твърдение 7 е доказано.

## ЛИТЕРАТУРА


[1] С. Гроздев. Международна олимпиада по математика. *Математика плюс*, (2011), No 3 (75), 56–59.

[2] Г. Паскалев, И. Чобанов. Забележителни точки в триъгълника. Народна просвета, София, 1985.

[3] В. Ненков. Обобщение на теоремата на Фойербах. *Математика и информатика*, (2008), No 2, 35–42.

[4] В. Ненков. Няколко свойства на Фойербаховата конфигурация. *Математика и информатика*, (2010), No 5, 42–61.

[5] В. Ненков. Две описани конични сечения и две породени от тях множества от прави. *Математика и математическо образование*, **36** (2007), 392–396.



Сава Иванов Гроздев
Институт по математика и информатика
ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8
1113 София
e-mail: sava.grozdev@gmail.com

Веселин Ненков Ненков
Технически колеж Ловеч
ул. Съйко Съев № 31
Ловеч
e-mail: vnenkov@mail.bg


## A REMARKABLE POINT OF THE TRIANGLE


**Sava Grozdev, Veselin Nenkov**



A new remarkable point of the triangle is discovered by means of a problem from the International Mathematical Olympiad in 2011. Various properties of this point are proved and some analogies to the assertion of the Olympic problem are found in connection with conics and harmonically conjugated lines.