МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2012
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2012
Proceedings of the Forty First Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 9–12, 2012

РЕШАВАНЕ НА ЗАДАЧИ С ПОМОЩТА НА ТАБЛИЦА

Борислав Лазаров, Ивайло Кортезов

Предлага се методика за достъпно представяне на нестандартни идеи, включително такива от висшата математика, за ученици от средния курс. Разглеждат се задачи и тестови единици с избираем отговор, при които табличното представяне на данни има решаващо значение за достигане до идеята в задачата.

Дидактическите измерения на таблично представяне на информацията са добре познати. Широко обсъждани са различни възможности за прилагане на електронни таблици в математическото образование ([1], с. 391–395). Представяне на данни в таблица има, например, при задачите от моделиране в учебниците за 7. кл. ([2], с. 105). В тази статия се спираме на няколко идеи, разработени в темите на турнира **Черноризец Храбър** и други математически състезания, с които искаме да провокираме колегията за по-масово въвеждане на методиката за решаване на задачи с таблици при подготовката за математически състезания, в частност при задачи с избираем отговор. Разгледаните примери отварят възможност и за осъвременяване на учебното съдържание.

Пример 1.[1] По време на *бялото училище* средната температура от всеки 4 поредни дни е била отрицателна, а средната температура от всеки 5 поредни дни е била положителна. Колко дена най-много може да е продължило бялото училище?

Решение. Седем дни са възможни, ако например средната температура през всеки от тях е съответно 2, 2, 2, -7, 2, 2, 2 градуса. Да допуснем, че е имало осем поредни дни и да означим средните им температури (в градуси) с a, b, c, d, e, f, g, h. Тогава в таблицата

a	b	c	d	e
b	c	d	e	f
c	d	e	f	g
d	e	f	g	h

сборовете на елементите във всеки ред са положителни, а сборовете на елементите във всеки стълб (колонка) са отрицателни. Така за сборът от всички елементи в таблицата веднъж, групирайки елементите по редове, ще получим, че е положителен, а втори път, групирайки елементите по стълбове, ще получим, че е отрицателен, което е противоречие.

[1]Задача 27 от темата за 11–12 кл. на турнира **Черноризец Храбър**, 2008 г., предложена от Ив. Кортезов.

Идеята от пример 1 е залегнала и в следващия пример, където се работи в абстрактна, въображаема таблица.

Пример 2. Депутатите от един парламент участват в комисии. Всяка от комисиите съдържа повече от половината депутати. Да се докаже, че някой депутат участва в повече от половината комисии.

Решение. Да направим таблица с i реда, всеки от които съответства на някоя от комисиите, и j стълба, всеки от които съответства на някой от депутатите. В тази таблица да впишем $+$ в позицията $(i;j)$, когато депутатът j участва в комисията i, а в противен случай да впишем $-$. Според условието в повече от половината позиции на всеки ред стои $+$, а тогава и в повече от половината от позициите на цялата таблица стои $+$. Сега по принципа на Дирихле следва, че поне в един стълб в повече от половината от позициите стои $+$, което означава, че съответният депутат членува в повече от половината комисии.

В пример 2 по същество беше построено фазово пространство. Възможността да се въведе фазово пространство в учебната програма е обоснована в [3]. Тук ще дадем още два примера как това е направено в различен контекст.

Пример 3.[2] При хвърляне на два зара P и Q се падат съответно точки p и q. Каква е вероятността уравнението $x^2 + px + q = 0$ да има два различни реални корена?

Решение. За $p, q = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ попълваме в таблица знака на $D = p^2 - 4q$:

$p \setminus q$	1	2	3	4	5	6
1	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
2	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
3	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$
4	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
5	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
6	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

Сега преброяваме 17 благоприятни изхода от общо 36, което означава, че търсената вероятност е $\dfrac{17}{36}$.

Нашето мнение е, че идеите на дискретното фазово пространство могат да се поднасят достъпно и в по-ниските класове. Да разгледаме следната задача:

Пример 4.[3] Хокеен мач между отборите A и B завършил при резултат 5:8. Докажете, че е имало момент от мача, в който отборът A е отбелязал толкова попадения, колкото са оставали на B да отбележи до края на мача.

Решение. Разглеждаме правоъгълник с размери 6×9, разделен на единични клетки. Във всяка клетка отбелязваме двойка числа, както е показано на таблицата.

[2]Задача 27 от темата за 11–12 кл. на турнира **Черноризец Храбър**, 2010 г., предложена от Й.Табов.

[3]Задачата е от `http://www.problems.ru`, задача 31 366; решението е от [4], с. 15.

5:0	5:1	5:2	5:3	5:4	5:5	5:6	5:7	5:8
4:0	4:1	4:2	4:3	4:4	4:5	4:6	4:7	4:8
3:0	3:1	3:2	3:3	3:4	3:5	3:6	3:7	3:8
2:0	2:1	2:2	2:3	2:4	2:5	2:6	2:7	2:8
1:0	1:1	1:2	1:3	1:4	1:5	1:6	1:7	1:8
0:0	0:1	0:2	0:3	0:4	0:5	0:6	0:7	0:8

Ако първото число a в таблицата е броят на отбелязаните голове от A, второто b – головете отбелязани от B, то всеки възможен резултат в мача може да бъде обозначен с клетка $a : b$. Развитието на резултата в мача съответства на поредица съседни клетки (с обща страна), свързващи долния ляв с горния десен ъгъл (ЮЗ-СИ-поредица). Здачата ще бъде решена, ако установим, че в даден момент $a = 8 - b$, т.е., че произволна ЮЗ-СИ-поредица трябва да съдържа клетка, за която $a + b = 8$. Това обаче е ясно, понеже всяка поредица съдържа клетка от отбелязания диагонал СЗ–ЮИ.

Идеята за решение с помощта на таблица, понякога е успешна и в задачи с много данни. Концепцията за включване на такива задачи в състезателни теми от задачи с избираем отговор, е разработена за целевата група изявени ученици от VII и по-висок клас ([5], с. 72-78). В следващия пример тази целева група включва ученици от V и VI клас.

Пример 5.[4] Четиримата учители А, Б, В и Г трябва да си направят разписание за работата в понеделник, вторник, сряда и четвъртък. Всеки учител влиза по един час през всеки от дните, като през четирите дни всеки влиза по веднъж във всеки от класовете К1, К2, К3, К4 и преподава по веднъж всеки от предметите Р1, Р2, Р3, Р4. Учителите решили в понеделник и четвъртък да преподават предметите Р1 и Р2, а във вторник и сряда – Р3 и Р4; в понеделник и вторник четиримата учители да преподават в класовете К1 и К2, а в сряда и четвъртък – в К3 и К4, като класовете имат по два часа в тези дни. При това:

А изявил желание във вторник да преподава Р4 в К2;

Б изявил желание в четвъртък да преподава Р2 в К3;

В изявил желание в понеделник да преподава Р2 в К1 и в сряда да преподава Р4 в К4;

Г изявил желание във вторник да преподава Р3 в К1.

При тези условия кой учител в четвъртък ще преподава Р1 в К4?

Голямото количество информация изисква като първа стъпка класифициране на данните. Насочваща идея за класификацията са означенията: предметите са именувани с Р, което е подсказване за редове, а класовете К са намек за колонки. Така се провокира използването на таблица за класифициране на информацията. Остава въпросът за дните, което на практика включва трето измерение. Псевдо-тримерни

[4]Модифицирана задача 20 от темата за 5–6 кл. на турнира **Черноризец Храбър**, 2011 г., предложена от Б. Лазаров.

таблици са тези от тип судоку, където изискванията за квадратите по същество реализират трето измерение.

Решение 1. Съставяме табличка-судоку, в която редовете съответстват на предмета, колонките (стълбовете) – на класовете. Условията в понеделник и четвъртък да се преподават предметите P1 и P2, а във вторник и сряда – P3 и P4; в понеделник и вторник четиримата учители да преподават в класовете K1 и K2, а в сряда и четвъртък – в K3 и K4 означават, че североизточният квадрат ще ни даде разписанието в понеделник, югоизточният квадрат – във вторник, югозападният квадрат – в сряда, северозападният – в четвъртък.

Последователно определяме X→Г, Y→А, Z→Г, с което отговора е открит. След това може да се убедим, че програма, удовлетворяваща всички условия, съществува (третата табличка).

			?
В		Б	
Г			
	А		В

→

			Z
В	X	Б	Y
Г			
	А		В

→

А	Б	В	Г
В	Г	Б	А
Г	В	А	Б
Б	А	Г	В

Решение 2. „Очевидно целта на задачата е създаване и разписване на латински квадрат и повечето деца я бяха много харесали.“[5]

		понеделник P1, P2	вторник P3, P4	сряда P3, P5	четвъртък P1, P2
пон, вт	**K1**	P1 - А 4 ход P2 - В	P3 - Г P4 - Б 3 ход		
пон, вт	**K2**	P1 - Б 7 ход P2 - Г 8 ход	P3 - В 1! 2 ход P4 - А		
ср, четв	**K3**			P3 - А 10 ход P4 - Г 9 ход	P1 - В 1! 1 ход P2 - Б
ср, четв	**K4**			P3 - Б 6 ход P4 - В	**P1 -? Г** P2 - А 5 ход

Вариант (1) е невъзможен, тъй като няма P2 във вторник, следователно (2) е единствената възможност за седмичното разпределение на В. В четвъртък единствената възможност за учителя В да преподава P1 е в K3, защото вече е преподавал в K4 в сряда. Сега очевидно Б и В не могат да влязат в K4 в четвъртък, защото вече са били в K3 в четвъртък. Освен това В е в P3 във вторник, а единствено свободно във вторник е в K2. Сега следват ходове 3 и 4, откъдето и А не може да бъде в K4 в четвъртък по предмет P1. Остава единствено възможно Г.

Тези примери показват как структурирането на данните от условието в таблица има насочващ ефект за решаването на задачата. Но даже и без да се стигне до самата идея за решение, табличното представяне на данни е признак за наличие на математическо чувство у ученика ([5], с.75). Такова чувство е много необходимо

[5]Цитат от писмото на Цветелина Пеева, в което представя на авторите последващото решение 2.

при изграждането на компетентност от синтетичен тип, в която математическата компонента е ключова.

В заключение ще отбележим, че таблиците могат да бъдат мощен инструмент в решаването на нестандартни задачи при подготовка и по време на математически състезания, особено при задачи с избираем отговор. Табличното онагледяване има самостоятелно значение в методиката, за което обаче са необходими по-нататъшни изследвания.

Благодарност. Авторите благодарят на Румяна Караджова за ценните забележки и на Цветелина Пеева за предоставеното решение 2 на пример 5.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Й. Табов, Н. Събева. Компютърно моделиране с приложения в образованието. *Математика и математическо образование*, **32**, (2003), 391–395.

[2] Ч. Лозанов и др. Математика за седми клас. Анубис, София, 2008.

[3] Б. Лазаров. Идеята за фазово пространство в задачи. Доклад на Националния семинар „Математическото образование в Европейската година за творчество и иновации“, ИМИ, 22–23.12.2009 г.

[4] Б. Лазаров. Задачи за 7. клас. *Кандидат-гимназист*, бр. 41, 2009.

[5] Lazarov, B. Monster Problems Design and Sense-of-Mathematics Building. Proceedings of the 6th Congress of the World Federation of National Mathematics Competitions, Riga, Latvia, 2011.

Борислав Лазаров, Ивайло Кортезов
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките
ул. Акад. Георги Бончев, бл. 8
1113 София
`e-mail`: `lazarov@math.bas.bg, kortezov@math.bas.bg`

PROBLEM SOLVING BY TABLES

Borislav Lazarov, Ivaylo Kortezov

The paper describes an approach presenting non-standard ideas (including ideas from higher mathematics) to secondary school students. The examples under consideration illustrate the crucial role of the tables for reaching the point of the problem.

Key words: multiple-choice competitions, discrete phase space, monster problems.