

МАКСИМАЛЕН БРОЙ КОРЕНИ НА ЕДИН ТИП МОДУЛНИ УРАВНЕНИЯ

Росен Николаев

В статията се разглежда един вид модулни уравнения с параметри. Целта е да се изведат условия за параметрите, при които съществува максималният брой корени. Формулирани са три теореми. Първата дава условията, при които се гарантира съществуването на максималния брой корени на уравнението. В теореми 2 и 3 се формулират условия, при които броят на корените е под максималния. Разгледани са и подходящи примери.

При един тип модулни уравнения тяхното графично решаване подсказва да се определят условия, при които се получава максималният брой корени на такова уравнение. Графичният метод се използва като евристично средство, подсещащо за по-нататъшните разсъждения. Такъв подход се среща и в други публикации, като например в монография на С. Гроздев [2].

Нека разгледаме следната

Задача. *Да се определят стойностите на параметъра p , при които уравнението*

$$||x^2 - 4| - 5| = p$$

има максимален брой реални корени. Какъв е техният брой?

Първо да дадем алгебричното решение на задачата:

1) $p > 0$;

2) $|x^2 - 4| = 5 \pm p$ и за да има максимален брой корени, трябва $p < 5$;

3) $x^2 = 4 \pm (5 \pm p)$ или

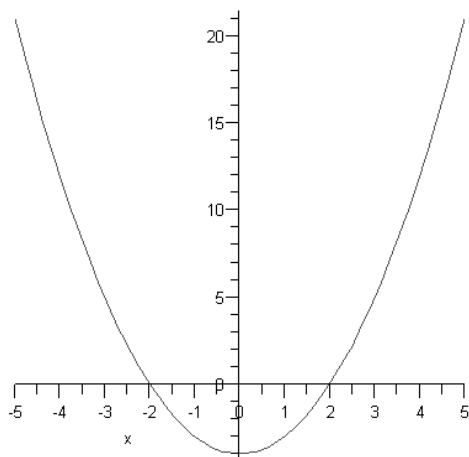
$$x^2 = 9 + p > 0 \cup x^2 = 9 - p > 0 \cup x^2 = -1 + p > 0 \cup x^2 = -1 - p > 0.$$

Окончателно $p \in (1, 5)$.

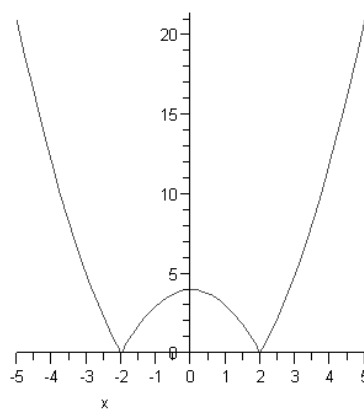
Сега да представим едно графично решение.

Графиките на функциите $x^2 - 4$, $|x^2 - 4|$, $|x^2 - 4| - 5$ и $||x^2 - 4| - 5|$ са показани съответно на Фиг. 1, Фиг. 2, Фиг. 3 и Фиг. 4.

От Фиг. 4 се вижда, че ако $p \in (1, 5)$, уравнението ще има максимален брой корени и те са шест.



Фиг. 1



Фиг. 2

Графичното решение на тази задача предизвиква следните разсъждения:

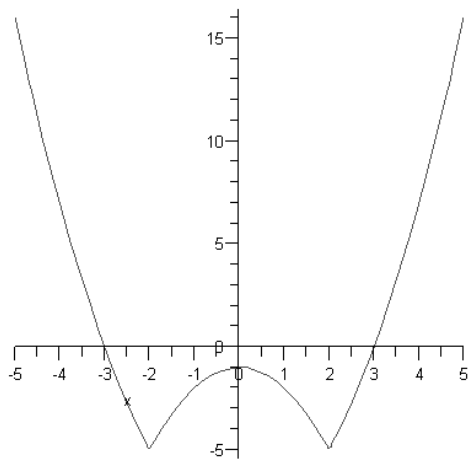
Ако е дадено в общ вид уравнението

$$(1) \quad |\dots| | | | ax^2 + bx + c | - n_1 | - n_2 | - n_3 | \dots - n_k | = p,$$

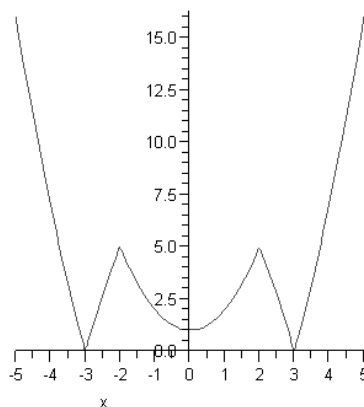
то:

1. Какъв е въобще максималният брой на различните реални корени на уравнение (1)?

2. При какви зависимости между параметрите a, b, c, n_i ($i = \overline{1, k}$) и p се получава този максимален брой различни реални корени?



Фиг. 3



Фиг. 4

Да формулираме две известни твърдения като леми, които използваме впоследствие.

Лема 1. *Броят на различните реални корени на уравнение (1) е най-много 2^{k+2} .*

Доказателството е просто. След разкриване на всеки модул, броят на уравненията се удвоява. В уравнение (1) има $k + 1$ модула, следователно се получават 2^{k+1} квадратни уравнения и от тук следва, че максималният брой различни реални корени е 2^{k+2} .

Лема 2. *Уравненията $ax^2 + bx + c_1 = 0$ и $ax^2 + bx + c_2 = 0$, при $c_1 \neq c_2$ нямат общ корен.*

Доказателството е очевидно. Ако допуснем, че имат общ корен x_0 , то $ax_0^2 + bx_0 + c_1 = ax_0^2 + bx_0 + c_2$, т.е. $c_1 = c_2$, което противоречи на условието, че $c_1 \neq c_2$.

Нека за параметрите в уравнение (1) въведем следните означения:

$$(2) \quad \frac{b^2 - 4ac}{4|a|} - \sum_{i=1}^k n_i = A,$$

$$(3) \quad n_l - \sum_{i=l+1}^k n_i = B_l, \quad l = \overline{1, k-1}, \quad \text{за } k > 1 \text{ и } n_1 = B_1.$$

Като отговор на втория въпрос формулираме следната

Теорема 1. *Ако $a \neq 0$, $A > 0$, $B_l > 0$ ($l = \overline{1, k-1}$) и $n_i > 0$ ($i = \overline{1, k}$), то за $p \in (0; \min \{A, B_l \text{ } (l = \overline{1, k-1}), n_k\})$ уравнение (1) има 2^{k+2} различни реални корена.*

Доказателство.

1) От това, че $A > 0$, $n_i > 0$ ($i = \overline{1, k}$) и $|a| > 0$, следва че $D = b^2 - 4ac > 0$ и уравнението $ax^2 + bx + c = 0$ има два различни реални корена.

2) Ще докажем теоремата по индукция за k .

А. Нека $k = 1$. Уравнение (1) придобива вида

$$(4) \quad ||ax^2 + bx + c| - n_1| = p.$$

$$\text{Тогава } A = \frac{b^2 - 4ac}{4|a|} - n_1, \quad B_1 = n_1.$$

От условията на теоремата $A > 0$ и $B_1 > 0$ и $p \in \left(0; \min \left\{\frac{b^2 - 4ac}{4|a|} - n_1, n_1\right\}\right)$ следва

$$(5) \quad p < \frac{b^2 - 4ac}{4|a|} - n_1 \quad \text{и}$$

$$(6) \quad p < n_1.$$

Като разкрием модулите в уравнение (4) $|ax^2 + bx + c| - n_1 = \pm p \rightarrow |ax^2 + bx + c| = n_1 \pm p \rightarrow ax^2 + bx + c = \pm n_1 \pm p$.

Получаваме четири уравнения с еднакви a и b и $c' = c \pm n_1 \pm p$.

$$D_i = b^2 - 4a(c \pm n_1 \pm p) = b^2 - 4ac - 4|a|(\pm n_1 \pm p) = 4|a| \left[\frac{b^2 - 4ac}{4|a|} - (\pm n_1 \pm p) \right].$$

От (6) $0 < p < n_1 \Rightarrow n_1 + p > n_1 - p > p - n_1 > -p - n_1$. Достатъчно е да

докажем, че $\frac{b^2 - 4ac}{4|a|} > n_1 + p$, за да бъдат четирите дискриминанти положителни, но това следва от условие (5). От доказаното следва, че четирите квадратни уравнения имат по два различни реални корена.

$c'_1 = c + n_1 + p_1$, $c'_2 = c + n_1 - p_1$, $c'_3 = c - n_1 + p_1$, $c'_4 = c - n_1 - p_1$ и очевидно те са различни помежду си и от Лема 2 следва, че нямат общи корени, следователно уравнение (4) има осем различни реални корена. Следователно за $k = 1$ теоремата е доказана.

В. Допускаме, че теоремата е вярна до $k - 1$.

С. Ще докажем, че теоремата е в сила и за k .

Уравнение (1) разделяме на две уравнения:

$$(7-8) \quad |\dots| |ax^2 + bx + c| - n_1| - n_2| \dots - n_{k-1}| = \pm p + n_k = p'(p''),$$

за които ще докажем, че са в сила условията на теоремата, за случая $k-1$ ($p' = p + n_k$, $p'' = -p + n_k$).

$$\frac{b^2 - 4ac}{4|a|} > \sum_{i=1}^k n_i > \sum_{i=1}^{k-1} n_i, (n_k > 0) \Rightarrow A' > 0$$

$$n_l > \sum_{i=l+1}^k n_i, \quad l = \overline{1, k-1}$$

$$\Rightarrow n_l > \sum_{i=l+1}^{k-1} n_i, \quad l = \overline{1, k-2} \Rightarrow B'_l > 0, \quad l = \overline{1, k-2}$$

$$p > 0 \text{ и } \begin{cases} p < \frac{b^2 - 4ac}{4|a|} - \sum_{i=1}^k n_i & (*) \\ p < n_l - \sum_{i=l+1}^k n_i, \quad l = \overline{1, k-1}, & (**) \\ p < n_k & (***) \end{cases}$$

От (***) $\Rightarrow p' > 0$ и $p'' > 0$.

От (*) $\Rightarrow p + n_k < A' \Rightarrow p' < A'$, но $p'' < p' \Rightarrow p'' < A'$.

От (**) $p + n_k < n_l - \sum_{i=l+1}^{k-1} n_i, \quad l = \overline{1, k-1}$

$$\Rightarrow p' < B'_l, \quad l = \overline{1, k-2} \text{ и } p'' < B'_l, \quad l = \overline{1, k-2}.$$

Следователно, за уравнения (7-8) са изпълнени всички условия на теоремата при $k - 1$ и тогава от допускането в В следва, че всяко от тях има по 2^{k+1} различни реални корена. Ако допуснем, че те имат общ корен, тъй като левите им страни са еднакви, следва, че $p' = p'' \Rightarrow p = -p$ или $p = 0$, но $p > 0 \Rightarrow$ те нямат общ корен.

Следователно, общо двете уравнения (7-8) имат $2 \cdot 2^{k+1} = 2^{k+2}$ различни реални корена, а това са точно корените на изходното уравнение (1), с което теоремата е доказана.

Да разгледаме един пример:

Има ли възможния най-голям брой корени уравнението

$$|||x^2 - 4x - 16| - 10| - 4| - 3| = p,$$

т.е. $2^5 = 32$ и за кои p това е изпълнено?

$$\frac{b^2 - 4ac}{4|a|} = \frac{16 + 64}{4} = 20,$$

$$n_1 = 10, \quad n_2 = 4, \quad n_3 = 3$$

$$A = 20 - 17 = 3 > 0,$$

$$B_1 = 10 - 7 = 3 > 0,$$

$$n_3 = 3 > 0.$$

Следователно са изпълнени условията на теоремата и уравнението има 32 различни реални корена и това е изпълнено за $p \in (0, 1)$.

Може да бъде доказана и следната по-силна

Теорема 2. Ако е нарушено поне едно от условията в Теорема 1, то за всяко реално p уравнението (1) има по-малко от 2^{k+2} различни реални корена.

Под „нарушено поне едно от условията“ се разбира: ако е в сила поне едно от условията:

- 1) $A \leq 0$;
- 2) $B_l \leq 0$, за поне едно $l = \overline{1, k-1}$;
- 3) $n_i \leq 0$, за поне едно $i = \overline{1, k}$.

Теорема 3. Ако са изпълнени условията в Теорема 1, но p е извън посочения интервал, то броят на различните реални корени на уравнението (1) е по-малък от 2^{k+1} .

Задачи:

1. Колко е максималният брой корени на уравнението

$$||| ||| -x^2 - 4x + 24 | - 15 | - 6 | - 3 | - 2 | = 0, 73?$$

2. Колко е максималният брой корени на уравнението

$$||| ||| 2x^2 - 4x - 49 | - 20 | - 9 | - 6 | - 2, 5 | = k$$

и за кои k се достига?

3. Да се намери броят на корените на уравнението

$$\left| \dots \left| \left| x^2 - 1 \right| - \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{4} \right| \dots - \frac{1}{2^{2008}} \right| = a$$

при $a = \frac{1}{2^{2009}}$ и да се намерят стойностите на реалния параметър a , така че уравнението да има възможно най-голям брой корени и да се определи техният брой.

Разбира се този тип задачи могат да бъдат доразширени и с функциите, различни от квадратния тричлен, както и вместо n_i да се разгледат функциите $n_i(x)$. Различни примери с използване на графичен подход при задачи с параметри има например в руската специализирана литература [1, стр. 89–97].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. И. Козко, В. Г. Чирский. Задачи с параметрами. Изд. МЦНМО, Москва, 2007.
- [2] S. GROZDEV. For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice). ADE, Sofia, 2007.

Росен Николаев
Катедра Математически науки
Икономически университет – Варна
бул. Княз Борис I № 77
9002 Варна
e-mail: nikolaev_rosen@hotmail.com

MAXIMUM NUMBER OF ROOTS OF A TYPE OF EQUATIONS WITH MODULES

Rosen Nikolaev

The article examines a type of equations with modules and involving parameters. The aim is to derive conditions for the parameters such that the equation has the maximum number of roots. Three theorems are formulated. The first gives conditions that ensure the existence maximum number of roots of the equation. Theorems 2 and 3 give the conditions under which the number of roots is less than the maximum one. Appropriate examples are considered.