МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2026
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2026
Proceedings of the Fifty-Fifth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Tryavna, Bulgaria, April 5–9, 2026

ANALYSIS OF SELECTED MATHEMATICAL PROBLEMS IN SCHOOL EDUCATION

Ivaylo Dimitrov[1], **Miroslav Hristov**[2], **Mehmed Kodzha**[3]
[1] Nancho Popovich High School of Mathematics, Shumen, Bulgaria
[2] Shumen University, Shumen, Bulgaria
[3] Nancho Popovich High School of Mathematics, Shumen, Bulgaria
e-mails: [1]pmg.iv.dimitrov@abv.bg, [2]miroslav.hristov@shu.bg, [3]mkodzha@gmail.com

The process of composing mathematical problems is a key element of mathematics education, requiring a high degree of precision, logical consistency, and clarity of formulation. Nevertheless, in practice various types of inaccuracies are often encountered, which can hinder the correct understanding or solution of problems and, in some cases, even lead to incorrect results. This article presents a systematic analysis of inaccuracies occurring in the formulation and solution of mathematical problems. The study covers inaccuracies in problem statements (unclear or ambiguous conditions) as well as in mathematical content (logical inconsistencies and improperly formulated requirements). Through the analysis of specific examples, a classification of these inaccuracies is proposed and recommendations for their avoidance are offered. The results of the study aim to support teachers, methodologists, and authors of educational materials in creating higher-quality and pedagogically effective mathematical problems.

Keywords: mathematical problems, school education

АНАЛИЗ НА ПОДБРАНИ МАТЕМАТИЧЕСКИ ЗАДАЧИ В УЧИЛИЩНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

Ивайло Димитров[1], **Мирослав Христов**[2], **Мехмед Коджа**[3]
[1,3]ППМГ „Нанчо Попович”, Шумен, България,
[2] Шуменски университет, Шумен, България
e-mails: [1]pmg.iv.dimitrov@abv.bg, [2]miroslav.hristov@shu.bg, [3]mkodzha@gmail.com

Процесът на съставяне на математически задачи е ключов елемент от обучението по математика, който изисква висока степен на прецизност, логическа последователност и яснота на формулировките. Въпреки това, в практиката често се допускат различни видове неточности, които могат да затруднят правилното разбиране или

`https://doi.org/10.55630/mem.2026.55.153-162`

2020 Mathematics Subject Classification: 97D10, 97D99.

решаване на задачите, а в някои случаи да доведат и до некоректни решения. Настоящата статия представя систематичен анализ на допуснати неточности при съставяне и решаване на математически задачи. Изследването обхваща неточности във формулировката (неясни или двусмислени условия) и математическото съдържание (логически несъответствия, некоректно поставени изисквания). Чрез анализ на конкретни примери се прави класификация на неточностите и се предлагат препоръки за тяхното избягване. Резултатите от изследването имат за цел да подпомогнат учителите, методистите и авторите на учебни материали в създаването на по-качествени и педагогически ефективни математически задачи.

Ключови думи: математически задачи, училищно образование

1 Въведение

Математическите задачи са основен инструмент в процеса на обучение по математика, тъй като те не само проверяват знанията и уменията на учениците, но и стимулират логическото мислене, аналитичните способности и креативността. Въпреки централната им роля в образователния процес, съставянето на качествени математически задачи остава предизвикателство както за учителите, така и за авторите на учебни помагала.

Процесът на създаване на математически задачи е сложен и многостранен. Той изисква не само отлични познания в конкретната област на математиката, но и дълбоко разбиране на възрастовите, когнитивните и психологическите особености на учениците, както и ясно осъзнаване на конкретните образователни цели. В този контекст задачата не е просто средство за упражнение или контрол, а внимателно подбран и формулиран инструмент за изграждане на математическа грамотност.

Неточностите при формулирането на задачи могат да възникнат на различни етапи — от създаването на самата идея до нейното конкретно формулиране и проверка. Те могат да бъдат свързани с неточна или неясна математическа формулировка, двусмислие, липса на логическа последователност или несъответствие между въпрос и решение. Подобни неточности не само затрудняват учениците, но и могат да доведат до неразбиране на ключови математически понятия и до формиране на погрешни представи.

Неточностите при съставяне на задачи могат да окажат влияние и върху процеса на преподаване и оценяване. Те могат да подведат учителя при преценката на нивото на усвояване на знанията и да възпрепятстват ефективната обратна връзка.

Настоящата статия има за цел да анализира допуснати неточности при съставянето на математически задачи, да разгледа причините за тяхната поява и да предложи препоръки за тяхното избягване. Чрез този анализ се надяваме да допринесем за създаването на по-ефективни и педагогически издържани математически задачи, които да подпомагат учебния процес и да насърчават развитието на математическата култура у учениците.

В статията се изследват задачи със следните типове неточности:

- несъществуваща геометрична конфигурация;
- нарушено аналитично условие;
- непълна формулировка.

2 Задачи

В настоящата секция са представени и анализирани подбрани математически задачи, използвани в училищното образование и ученическите състезания по математика, в които се наблюдават различни видове неточности. Всеки пример е подбран с цел да онагледи типични пропуски и несъответствия във формулирането, съдържанието или методическата насоченост на задачата. Представените примери служат като основа за формулиране на изводи и препоръки към практиката на съставяне на задачи.

Чрез този анализ се цели не само да се посочат и коригират конкретни недостатъци, но и да се стимулира критичен подход към създаването на учебни задачи, с оглед повишаване на тяхната ефективност и педагогическа стойност.

2.1 Задачи с несъществуваща геометрична конфигурация

В тази подсекция се изследват две задачи.

Първата задача, която разглеждаме, е от учебник по ООП Математика за 9. клас от раздела за начален преговор.

Задача 1. [3] В правоъгълен триъгълник с хипотенуза 7 cm е вписана окръжност с радиус 2 cm. Намерете периметъра на триъгълника.

Решение. Предложеният отговор в [3] е 18 cm. Идеята на авторите е да се приложи формулата

$$r = \frac{a+b-c}{2} \tag{1}$$

за радиуса на вписаната окръжност в правоъгълен триъгълник. Заменствайки $r = 2\ cm$ и $c = 7\ cm$, получаваме $2 = \dfrac{a+b-7}{2}$, откъдето $a + b = 11\ cm$. По този начин за периметъра на триъгълника получаваме $P = a + b + c = 11 + 7 = 18\ cm$. Както се вижда, задачата се решава лесно и не би представлявала трудност за учениците. Къде е проблемът?

Нека изследваме дадения правоъгълен триъгълник с хипотенуза 7 cm по-подробно. От Питагоровата теорема $a^2 + b^2 = c^2$ следва, че $b = \sqrt{49 - a^2}$. Заместваме в (1) и получаваме

$$r(a) = \frac{a + \sqrt{49 - a^2} - 7}{2}; \quad 0 < a < 7. \tag{2}$$

Функция (2) достига максимум при $a = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}$ и

$$r_{max}\left(\frac{7\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{7(\sqrt{2}-1)}{2}\ cm \approx 1,45\ cm. \tag{3}$$

Получената стойност в (3) показва, че максималният радиус на вписана окръжност в правоъгълен триъгълник с хипотенуза 7 cm е $r_{max} \approx 1,45\ cm$. Това доказва, че в такъв триъгълник не може да се впише окръжност с радиус 2 cm.

От друга страна, ако изследваме периметъра като функция на a, т.е.

$$P(a) = a + \sqrt{49 - a^2} + 7; \quad 0 < a < 7,$$

се оказва, че $P_{max}\left(\frac{7\sqrt{2}}{2}\right) = 7(\sqrt{2} + 1)\ cm \approx 16,9\ cm$. Това означава, че максималният периметър на правоъгълен триъгълник с хипотенуза $7\ cm$ е $7(\sqrt{2} + 1)\ cm \approx 16,9\ cm < 18\ cm$.

Направена е корекция на условието на задачата в [4]. Новото условие изглежда така:

Коригирано условие. [4] В правоъгълен триъгълник с хипотенуза $5\ cm$ е вписана окръжност с радиус $2\ cm$. Намерете периметъра на триъгълника.

Разликата с предишното условие е в дължината на хитотенузата на триъгълника. В този случай задачата отново не е коректна, понеже не съществува и такъв триъгълник. Тук най-големият радиус на вписаната окръжност е $r_{max} = \frac{5(\sqrt{2} - 1)}{2} \approx 1,04\ cm$.

Втората задача е от учебник по профил математика за 12. клас от раздел “Екстремални задачи в равнината”.

Задача 2. [5] Нека t е допирателната в точка C към описаната около $\triangle\ ABC$ окръжност, за който $\sphericalangle ACB = 120^0$ и лицето му е $\sqrt{3}$. Точките P и Q са от правата t, като $\sphericalangle PBC = \sphericalangle CBA$ и $\sphericalangle QAC = \sphericalangle CAB$ и нито една от тези две точки не е от AB. Намерете дължината на AB, за която периметърът на четириъгълника $ABPQ$ е най-малък.

Решение. В [5] са посочени следните отговори: $P_{ABPQ_{min}} = 4\sqrt{2}$ и $AB = \sqrt{2}$. Първо ще покажем как се получават тези резултати, след което ще изследваме по-подробно задачата за неточности.

Нека да направим следните означения: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\sphericalangle CAB = \sphericalangle QAC = \alpha$ и $\sphericalangle CBA = \sphericalangle PBC = 60^0 - \alpha$. Лесно се изразяват останалите ъгли в $\triangle\ ACQ$ и $\triangle\ BCP$ (фиг. 1).

От $S_{ABC} = \sqrt{3} \Rightarrow ab = 4$ и от косинусовата теорема в $\triangle\ ABC$ получаваме

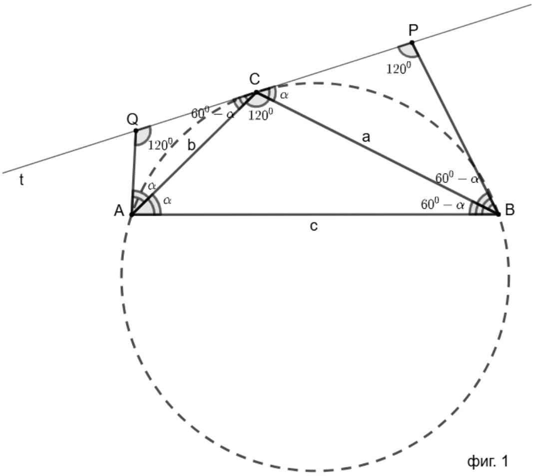
$$c^2 = a^2 + b^2 + 4. \tag{4}$$

Използвайки подобието $\triangle\ ABC \sim \triangle\ ACQ \sim \triangle\ BCP$, изразяваме всички страни на четириъгълника $ABPQ$ чрез страната $AB = c$ и за периметъра му получаваме

$$P_{ABPQ}(c) = \frac{2c^2 + 4}{c}, \quad c > 0. \tag{5}$$

Изследвайки (5), като функция на c, установяваме, че има единствена точка на екстремум $c = \sqrt{2}$, в която има минимум. Оттук за минималния периметър на $ABPQ$ получаваме $P_{ABPQ_{min}} = 4\sqrt{2}$. Това са и посочените отговори в [5].

Сега да направим задълбочен анализ на проблема. С непосредствена проверка,



фиг. 1

замествайки $c = \sqrt{2}$ в (4), получаваме $a^2 + b^2 = -2$, което е невъзможно. Къде е проблемът?

Противоречието се дължи на това, че за да удовлетворява условията от задачата, страната $AB = c$ трябва да отговаря на определени критерии. Какви са те?

От $ab = 4$ и от известното неравенство $(a - b)^2 \geq 0$ получаваме

$$a^2 + b^2 \geq 8. \tag{6}$$

Замествайки (6) в (4), получаваме $c^2 \geq 12$, откъдето $c \geq 2\sqrt{3}$. Понеже (5) е растяща функция в $(\sqrt{2}; +\infty)$ и $2\sqrt{3} \in (\sqrt{2}; +\infty)$, то за най-малкият периметър на $ABPQ$ се получава $P_{ABPQ_{min}}(2\sqrt{3}) = \dfrac{14\sqrt{3}}{3}$ при $AB = c = 2\sqrt{3}$. Това е правилният отговор на задачата. Можем да заключим, че не е достатъчно изискването $c > 0$ в (5) и оценката $c \geq 2\sqrt{3}$ е критичен момент в решението на задачата, който задължително трябва да забележим. Това още веднъж потвърждава важността на допустимите стойности на променливата при изследване на функция за екстремуми.

Впрочем ако се състави функция на страната $BC = a$ или $AC = b$ на $\triangle\ ABC$ и се изследва за екстремум, не би се наложило да изискваме допълнителни условия за тях. Единственото изискване за тези страни е те да са строго положителни. По този начин най-малкият периметър би се получил в точките на минимум за тези функции.

2.2 Задачи с нарушено аналитично условие

В подсекция 2 се разглеждат две задачи.

Първата задача е от сборник за подготовка за Държавен зрелостен изпит по профил математика.

Задача 3. [1] Безкрайната сума $S = 1 + \dfrac{1}{cos150^0} + \dfrac{1}{cos^2 150^0} + ... + \dfrac{1}{cos^n 150^0} + ...$ е равна на:

А) $\sqrt{3}$ Б) $2\sqrt{3}-3$ В) $4-2\sqrt{3}$ Г) $1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Решение. Посоченият отговор в [1] е Б) $2\sqrt{3}-3$. Първо ще покажем как се получава този отговор.

От формулата

$$S=\frac{a_1}{1-q} \tag{7}$$

за сумата на безкрайно намаляваща геометрична прогресия с $a_1=1$ и $q=\dfrac{1}{cos150^0}=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, получаваме $S=\dfrac{1}{1-\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)}=\dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=2\sqrt{3}-3$. Къде е проблемът?

Виждаме, че след директно заместване във формула (7) се получава предложеният отговор. Не е трудно да се забележи, че $\mid q\mid=\left|-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right|=\dfrac{2}{\sqrt{3}}>1$, което нарушава условието за сходимост на безкрайна геометрична прогресия и ни лишава от правото да приложим формула (7).

Това, както и в Задача 1, още веднъж потвърждава факта, че не винаги директното заместване във формулите води до правилния резултат. Напротив, преди всичко първо е нужно да се уверим в коректността на условието, след което да се насочим към познатите формули, с помощта на които бихме достигнали до желания резултат.

Задача 3 е коригирана в [2] по следния начин:

Коригирано условие. [2] Безкрайната сума $S=1+cos150^0+cos^2150^0+...+cos^n150^0+...$ е равна на:

А) $\sqrt{3}$ Б) $4+2\sqrt{3}$ В) $4-2\sqrt{3}$ Г) $1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Новото условие е коректно, понеже $\mid q\mid=\left|-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}<1$ и след прилагане на формула (7) се получава верният отговор $S=4-2\sqrt{3}$.

Втората задача в тази подсекция е от общинския кръг на Националната олимпиада по математика за 11. клас.

Задача 4. [6] Решете уравнението

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+...+\frac{1}{1+2+3+...+x}=\frac{2022}{2021}.$$

Първо ще представим авторското решение:

Решение. [6] Използвайки формулата $1+2+3+...+x=\dfrac{x(x+1)}{2}$ за лявата страна на уравнението, то може да се запише във вида $\frac{1}{1}+\frac{2}{2.3}+\frac{2}{3.4}+...+\frac{2}{x(x+1)}=\frac{2022}{2021}$. След разделяне уравнението на 2, получаваме

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1011}{2021}. \tag{8}$$

Представяйки всяка една от дробите, в лявата страна на (8), във вида $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$, свеждаме (8) до

$$1-\frac{1}{x+1}=\frac{1011}{2021}. \tag{9}$$

След решаване на (9) получаваме крайният отговор $x=\frac{1011}{1010}$.

Нека сега се задълбочим в предложеното решение. На пръв поглед задачата изглежда коректна. В условието обаче е пропуснато да се отбележи на кое множество принадлежи x, но не е трудно да се предположи, че $x \in \mathbb{N}$. При така полученото решение обаче $x \notin \mathbb{N}$. Но това означава, че лявата страна на уравнението няма смисъл. Това е достатъчно да направим извода, че условието не е коректно зададено. Всички събираеми в лявата страна са положителни, а дори сборът само на първите две е по-голям от дясната страна $\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}=\frac{4}{3}>\frac{2022}{2021}\right)$. Това от своя страна също доказва некоректността на условието. Задачата би била смислена единствено ако крайният отговор $x \in \mathbb{N}$.

Едно коректно условие на задачата би изглеждало по следния начин:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+...+\frac{1}{1+2+3+...+x}=\frac{4040}{2021}.$$

В общия случай, ако числото k е дясната страна на уравнението, то $k=\frac{2x}{x+1}$, $x \in \mathbb{N}$.

2.3 Задачи с непълна формулировка

В третата подсекция се анализира една задача.

Последната задача, която ще изследваме в тази секция, е от Пролетен математически турнир за 4. клас. Резултатите от състезанието се вземат предвид при приема в 5. клас в математически гимназии.

Задача 5. [7] Намерете всички решения на ребуса ПМС+РУСЕ=2014, ако на еднаквите букви съответстват еднакви **ненулеви** цифри, а на различните букви съответстват различни цифри.

Нека да разгледаме решението, което се предлага от авторите, след което ще анализираме внимателно условието на задачата:

Решение. [7] Понеже П не може да е нула, то има пренос към хилядите. Тогава

Р=1. От друга страна С и Е са различни и никое от тях не е 1 или 0. Следователно С+Е не може да е 4. Получаваме, че С+Е=14, откъдето С>4, М+С=10 и П+У=9.
Ако С=5, то М=5: абсурд.
Ако С=6, то Е=8, М=4; сега П и У са 2 и 7 в някакъв ред.
Ако С=7, то Е=7: абсурд.
Ако С=8, то Е=6, М=2; сега П и У са 4 и 5 в някакъв ред.
Ако С=9, то М=1=Р: абсурд.
И така, решенията са: 246+1768, 746+1268, 428+1586 и 528+1486.

Нека сега се задълбочим в условието на задачата. Повтаря се само буквата С, на която по условие съответства **ненулева** цифра. За различните букви обаче нямаме ограничение да са **ненулеви** (според условието). В решенията, които се предлагат, не е използвана цифрата нула за различните букви. Това е пропуск и риск да бъдат ощетени някои ученици. Важно е да отбележим, че състезанието участва в приема за 5. клас в редица математически гимназии в България. Ето кои са другите решения, които отговарят на даденото условие, а не са посочени: 374+1640, 674+1340, 928+1086 и 946+1068.

В предложеното от авторите решение се казва, че П не може да е нула. Трябва да подчертаем обаче, че от условието и това не става ясно. По условие не се изисква ПМС да е трицифрено число, което би означавало, че на буквата П също може да съответства цифрата нула. В такъв случай се получават още две решения: 028+1986 и 046+1968.

3 Заключение

Математическата задача е едно от най-мощните и универсални средства за обучение, развитие и оценяване в училищната практика. Тя изпълнява не само дидактична функция, но и формира трайни когнитивни и социални умения, които подготвят учениците за справяне с реални житейски предизвикателства. Именно поради тази централна роля, качеството на съставените математически задачи е от ключово значение за постигане на ефективно и смислено обучение.

Извършеният анализ в настоящата статия показва, че неточностите при съставянето на математически задачи са често срещан и подценяван проблем, който може да окаже сериозно влияние върху учебния процес. Независимо дали се касае за съдържателни, логически, езикови или методически неточности, тяхното присъствие в учебните материали или в устните и писмени изпитвания може да доведе до значителни затруднения за учениците, включително до:

- неправилно разбиране на поставената задача;
- изграждане на погрешни математически представи и концепции;
- формиране на негативно отношение към математиката като учебен предмет;
- занижени постижения и ниска мотивация за учене.

Причините за допускането на подобни неточности са комплексни. Те могат да произтичат от липсата на достатъчно педагогически опит, недостатъчна езикова яснота, непознаване на психологическите особености на възрастовата група или неосъзнато прилагане на неподходящи методически решения. В някои случаи неточностите се дължат и на недооценяване на ролята на яснотата и последователността при формулирането на задачите.

Една от основните констатации на настоящото изследване е необходимостта от създаване и прилагане на систематизирани критерии за оценка на качеството на математическите задачи преди тяхното използване в учебния процес. Подобен инструмент може да включва:

- проверка за математическа коректност и единственост на решението;
- проверка за логическа последователност и пълнота на условието;
- езикова редакция за яснота и недвусмислие;
- съобразяване с възрастовите, когнитивните и културните особености на целевата група.

Също така е важно да се насърчава обменът на добри практики между учители и автори на учебни материали, както и провеждането на обучения, свързани със съставянето на качествени математически задачи. Чрез подобряване на уменията за създаване на задачи се повишава не само качеството на обучението, но и се създава учебна среда, която мотивира, вдъхновява и развива учениците.

В заключение можем да кажем, че всяка математическа задача е не само инструмент за проверка, но и носител на ценности, култура и начин на мислене. Именно затова грижливото ѝ съставяне и внимателното ѝ формулиране са от съществено значение за постигане на дългосрочни образователни резултати. Справянето с неточностите при съставяне на математически задачи е не само технически въпрос, но и важна стъпка към по-качествено и справедливо образование.

Благодарности: Това изследване е частично финансирано от проект за научни изследвания РД-08-114/05.02.2026 на Шуменски университет.

Литература

[1] К. Банков, С. Наков, Г. Николова, Д. Петрова, И. Цветкова. *Математика профилирана подготовка – задачи и тестове за Държавен зрелостен изпит.* София, Издателство Просвета, 2021. [K. Bankov, S. Nakov, G. Nikolova, D. Petrova, I. Cvetkova. Matematika profilirana podgotovka – zadachi i testove za Darzhaven zrelosten izpit. Sofia, Izdatelstvo Prosveta, 2021.] (in Bulgarian)

[2] К. Банков, С. Наков, Г. Николова, Д. Петрова, И. Цветкова. *Математика профилирана подготовка – задачи и тестове за Държавен зрелостен изпит.* София, Издателство Просвета, 2022. [K. Bankov, S. Nakov, G. Nikolova, D. Petrova, I. Cvetkova. Matematika profilirana podgotovka – zadachi i testove za Darzhaven zrelosten izpit. Sofia, Izdatelstvo Prosveta, 2022.] (in Bulgarian)

[3] Т. Витанов, М. Кьосева, П. Недевски. *Математика 9. клас.* София, Издателство Анубис, 2018. [T. Vitanov, M. Kyoseva, P. Nedevski. Matematika 9. klas. Sofia, Izdatelstvo Anubis, 2018.] (in Bulgarian)

[4] Т. Витанов, М. Кьосева, П. Недевски. *Математика 9. клас.* София, Издателство Клет България, 2024. [T. Vitanov, M. Kyoseva, P. Nedevski. Matematika 9. klas. Sofia, Izdatelstvo Klett Bulgaria, 2024.] (in Bulgarian)

[5] В. Златилов, Д. Капралова, Е. Каращранова, И. Тонов, М. Христова, И. Шаркова. *Математика профилирана подготовка – практическа математика.* София, Издателство Регалия 6, 2021. [V. Zlatilov, D. Kapralova,

E. Karashtranova, I. Tonov, M. Hristova, I. Sharkova. Matematika profilirana podgotovka – prakticheska matematika. Sofia, Izdatelstvo Regaliya 6, 2021.] (in Bulgarian)

[6] Национална Олимпиада по Математика – общински кръг. Шумен, 2021. [Nacionalna Olimpiada po Matematika – obshtinski krag. Shumen, 2021.] (in Bulgarian)

[7] Пролетен математически турнир. Русе, 2014. [Proleten matematicheski turnir. Ruse, 2014.] (in Bulgarian)