МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2026
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2026
Proceedings of the Fifty-Fifth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Tryavna, Bulgaria, April 5–9, 2026

AREAS IN CONVEX QUADRILATERAL

Plamen Gostev
Faculty of Mathematics and Informatics, Sofia University
Sofia High School of Mathematics, Bulgaria
e-mail: gostev@fmi.uni-sofia.bg

The concept of area is first introduced in primary school. As they go through secondary education, students delve deeper into the essence of area problems. The more advanced and interesting aspects are mainly explored in specialized Mathematics High Schools and within extracurricular math courses.
In the current article, we'll prove two well-known problems. We will then solve two geometry problems on convex quadrilaterals using parameters instead of concrete constants. The goal is to demonstrate quick and elegant solutions to a group of problems with a convex quadrilateral divided into smaller quadrilaterals. We will also provide ideas for creating similar problems.

Keywords: convex quadrilateral, area, ratio

ЛИЦА В ИЗПЪКНАЛ ЧЕТИРИЪГЪЛНИК

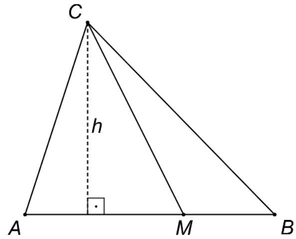
Пламен Гостев
Факултет по математика и информатика на СУ „Св. Климент Охридски“
Софийска математическа гимназия „Паисий Хилендарски“
e-mail: gostev@fmi.uni-sofia.bg

Понятието лице се среща още в началния етап на образование на учениците. В средния курс на обучение те навлизат повече в същината на задачите за лица. По-интересните и сложни задачи се разглеждат в математическите гимназии и в часовете за извънкласна работа.
В настоящата статия ще докажем две популярни основни задачи, след което ще решим две геометрични задачи за четириъгълник, но обобщени с параметър, а не с конкретна константа. С помощта на тези задачи ще демонстрираме бързи и елегантни решения на група от задачи за произволен изпъкнал четириъгълник, разделен на части, както и идеи за съставяне на подобни задачи.

Ключови думи: изпъкнал четириъгълник, лице, отношение

https://doi.org/10.55630/mem.2026.55.171-176
2020 Mathematics Subject Classification: 97G40.

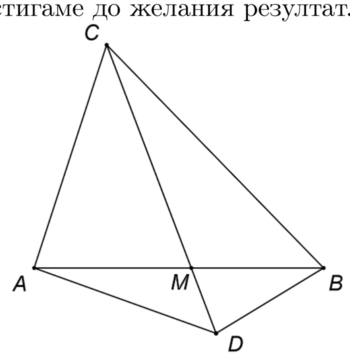
Основна задача 1: Точка M е от страната AB на ΔABC. Да се докаже, че $S_{AMC} : S_{BMC} = AM : BM$ и $S_{AMC} : S_{ABC} = AM : AB$.



Доказателство: Щом точките A, M и B лежат на една права и точка C не лежи на тази права, то триъгълниците ABC, AMC и BMC имат обща височина (h на чертежа).

Тогава $S_{ABC} = 0,5.h.AB$, $S_{AMC} = 0,5.h.AM$ и $S_{BMC} = 0,5.h.BM$. Разделяйки почленно последните две и първите две равенства, достигаме до желания резултат.

Основна задача 2: Даден е изпъкнал четириъгълник $ADBC$, диагоналите на който се пресичат в точка M. Да се докаже, че $S_{ACD} : S_{BCD} = AM : BM$.



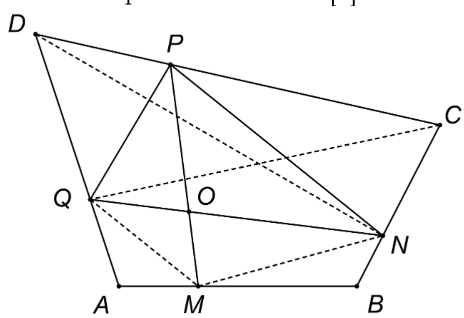
Доказателство: Прилагайки основна задача 1, получаваме:

$S_{AMC} : S_{BMC} = AM : BM$ и $S_{AMD} : S_{BMD} = AM : BM$.

Използвайки свойствата на пропорцията, достигаме до искания извод.

С помощта на подход, демонстриран в статия [1], и тези две основни задачи ще решим задача 1.16 на стр. 13 и задачи 4.21 и 4.22 на стр. 84 от книгата [2].

Задача 1. Точките M, N, P и Q лежат съответно на страните AB, BC, CD и AD на изпъкнал четириъгълник $ABCD$. Ако $MP \cap NQ = O$, $AM : MB = DP : PC = x$ и $BN : NC = AQ : QD = y$, намерете отношенията $MO : OP$ и $QO : ON$.



Решение: Ще използваме основна задача 1, за да изразим лицето на ΔQNP чрез лицата на ΔQND и ΔQNC:

$$S_{QNP} = S_{QNCD} - S_{NCP} - S_{QPD} = S_{QNCD} - \frac{1}{x+1}S_{NCD} - \frac{x}{x+1}S_{QCD} =$$

$$= S_{QNCD} - \frac{1}{x+1}\left(S_{QNCD} - S_{QND}\right) - \frac{x}{x+1}\left(S_{QNCD} - S_{QNC}\right) =$$

$$= S_{QNCD} - \frac{1}{x+1}S_{QNCD} + \frac{1}{x+1}S_{QND} - \frac{x}{x+1}S_{QNCD} + \frac{x}{x+1}S_{QNC}.$$

$$\Rightarrow S_{QNP} = \frac{1}{x+1}S_{QND} + \frac{x}{x+1}S_{QNC}\ .$$

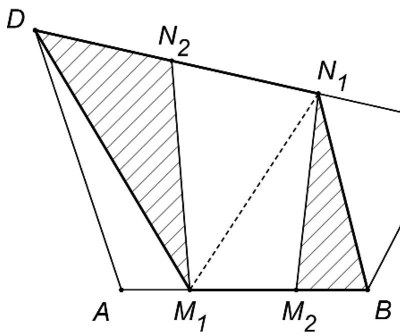
Аналогично $S_{QNM} = \dfrac{1}{x+1}S_{QNA} + \dfrac{x}{x+1}S_{QNB}$.

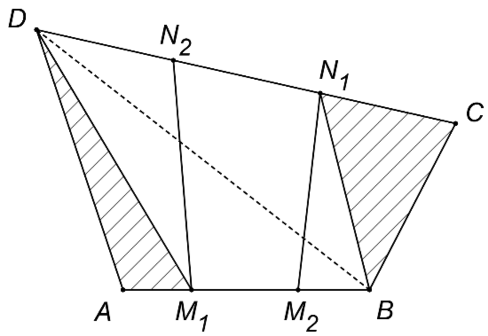
Но $S_{QNA} = yS_{QND}$ и $S_{QNB} = yS_{QNC}$. Заместваме в горното равенство

$$S_{QNM} = \frac{1}{x+1}yS_{QND} + \frac{x}{x+1}yS_{QNC} = y\left(\frac{1}{x+1}S_{QND} + \frac{x}{x+1}S_{QNC}\right) = y.S_{QNP}.$$

От основна задача 2 следва, че $MO : OP = y$. Аналогично $QO : ON = x$.

Задача 2. Точките M_1 и M_2 лежат на страната AB, а точките N_1 и N_2 – на страната CD на изпъкнал четириъгълник $ABCD$. Ако $AM_1 = M_2B = x.AB$ и $CN_1 = N_2D = x.CD$, където $0 < x < 0,5$, намерете отношението $S_{M_1M_2N_1N_2} : S_{ABCD}$.





Решение: Отново ще използваме основна задача 1:

$S_{AM_1D} + S_{BCN_1} = x.S_{ABD} + x.S_{BCD} = x.\left(S_{ABD} + S_{BCD}\right) = x.S_{ABCD}$

$S_{M_1N_2D} + S_{M_2BN_1} = \dfrac{x}{1-x}S_{M_1N_1D} + \dfrac{x}{1-x}S_{M_1BN_1} = \dfrac{x}{1-x}\left(S_{M_1N_1D} + S_{M_1BN_1}\right) =$

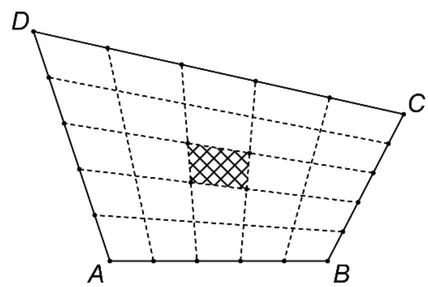
$= \dfrac{x}{1-x}S_{M_1BN_1D} = \dfrac{x}{1-x}\left(S_{ABCD} - (S_{AM_1D} + S_{BCN_1})\right) = \dfrac{x}{1-x}\left(S_{ABCD} - x.S_{ABCD}\right) =$

$= \dfrac{x}{1-x}.(1-x)S_{ABCD} = x.S_{ABCD}$.

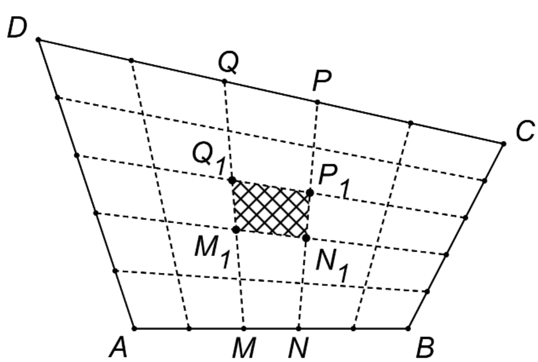
Тогава сборът от четирите лица $S_{AM_1D} + S_{M_1N_2D} + S_{M_2BN_1} + S_{BCN_1} = 2x.S_{ABCD}$.

$\Rightarrow S_{M_1M_2N_1N_2} = S_{ABCD} - (S_{AM_1D} + S_{M_1N_2D} + S_{M_2BN_1} + S_{BCN_1}) = (1-2x)S_{ABCD}$.

Задача 3. Всяка от четирите страни на изпъкнал четириъгълник $ABCD$ е разделена на 5 равни части. Точките са свързани до образуването на четириъгълна мрежа (както на чертежа). Да се докаже, че лицето на централния четириъгълник е 25 пъти по-малко от лицето на четириъгълника $ABCD$.



Решение: Ще използваме означените на чертежа точки M, N, P, Q, M_1, N_1, P_1 и Q_1. От задача 1 получаваме, че $MM_1 : M_1Q = NN_1 : N_1P = 2 : 3$, също така $MQ_1 : Q_1Q = NP_1 : P_1P = 3 : 2$. От тези равенства следва, че $MM_1 = Q_1Q = \dfrac{2}{5}MQ$ и $NN_1 = P_1P = \dfrac{2}{5}NP$.

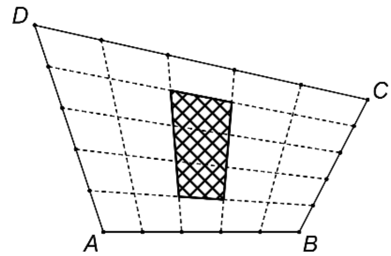


Ако използваме аналогични разсъждения за всяка от 16-те вътрешни пресечни точки стигаме до извода, че всяка една от пунктираните отсечки е разделена на 5 равни части от четирите си пресечни точки.

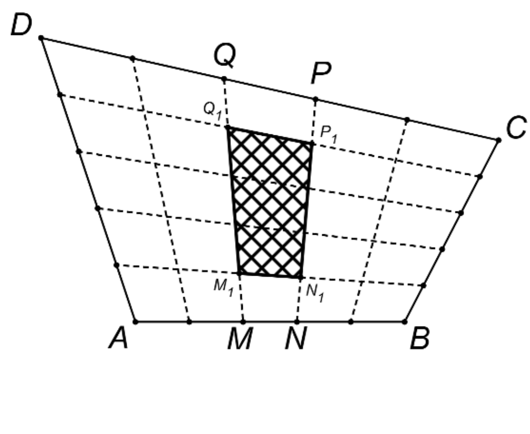
От задача 2 следва, че $S_{M_1N_1P_1Q_1} = \dfrac{1}{5}S_{MNPQ}$, но по условие $AM = BN = \dfrac{2}{5}AB$ и $CP = DQ = \dfrac{2}{5}CD$. Тогава $S_{MNPQ} = \dfrac{1}{5}S_{ABCD}$ (задача 2), откъдето получаваме, че $S_{M_1N_1P_1Q_1} = \dfrac{1}{25}S_{ABCD}$.

От решените вече задачи можем да съставим разновидности от задачи за четириъгълник, чиито страни са разделени на произволен брой равни части. В настоящата статия ще разгледаме примери, в които всяка страна е разделена на 5 или 6 равни части. Подходът остава същият независимо от броя на частите, на които са разделени страните на четириъгълника. Трябва да съобразим, че ако този брой е четен, то тогава не съществува „централен“ четириъгълник, но може чрез групиране на няколко малки четириъгълника да се получи по-голям, който да бъде „централен“ четириъгълник.

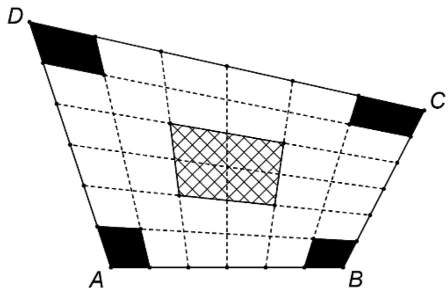
Задача 4. Всяка от четирите страни на изпъкнал четириъгълник $ABCD$ е разделена на 5 равни части. Точките са свързани до образуването на четириъгълна мрежа (както на чертежа). Докажете, че лицето на защрихования четириъгълник е $0,12$ от лицето на четириъгълника $ABCD$.



Решение: Използвайки доказаното в предишната задача, можем да твърдим, че $MM_1 = QQ_1 = \dfrac{1}{5}MQ$ и $NN_1 = PP_1 = \dfrac{1}{5}NP$. Тогава от основна задача 2 стигаме до извода, че $S_{M_1N_1P_1Q_1} = \dfrac{3}{5}S_{MNPQ}$. В задача 3 видяхме, че $S_{MNPQ} = \dfrac{1}{5}S_{ABCD}$, с което стигаме до заключението, че лицето на защрихования четириъгълник е $\dfrac{3}{25} = 0,12$ от лицето на четириъгълника $ABCD$.



Задача 5. Всяка от четирите страни на изпъкнал четириъгълник $ABCD$ е разделена на 6 равни части. Точките са свързани до образуването на четириъгълна мрежа (както на чертежа). Докажете, че:

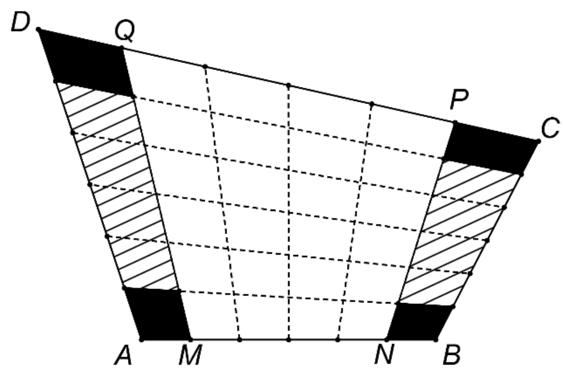


а) лицето на защрихования четириъгълник е $\frac{1}{9}$ от лицето на четириъгълника $ABCD$;

б) лицето на защрихования четириъгълник е равно на сбора от лицата на плътно оцветените четириъгълници.

Решение: а) Решението е аналогично на това на задача 3.

б) От доказаното в задача 2, приложено за четириъгълника $ABCD$, получаваме, че $S_{MNPQ} = \frac{4}{6}S_{ABCD} = \frac{2}{3}S_{ABCD}$. Тогава $S_{AMQD} + S_{BNPC} = \frac{1}{3}S_{ABCD}$. В задача 3 видяхме, че всяка от пунктираните линии е разделена на 6 равни части от пресечните си точки. Следователно сборът от лицата на двата защриховани четириъгълника е $\frac{4}{6}S_{AMQD} + \frac{4}{6}S_{BNPC} = \frac{2}{3}\left(S_{AMQD} + S_{BNPC}\right)$.

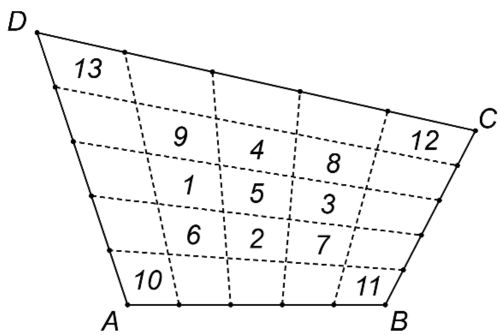


Оттук сборът от лицата на четирите плътно оцветени четириъгълника е

$$\frac{1}{3}\left(S_{AMQD} + S_{BNPC}\right) = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}S_{ABCD} = \frac{1}{9}S_{ABCD}.$$

Използвайки и подточка а), получаваме исканото твърдение.

Задача 6. Всяка от четирите страни на изпъкнал четириъгълник $ABCD$ е разделена на 5 равни части. Точките са свързани до образуването на четириъгълна мрежа (както на чертежа). Някои от лицата на малките четириъгълници са номерирани. Да се докаже, че:



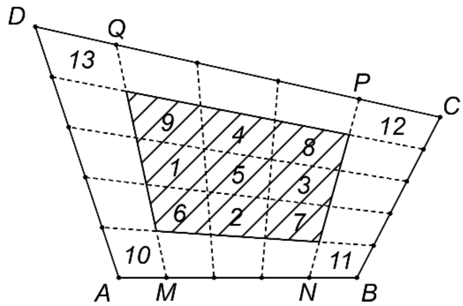
а) $S_1 + S_3 = S_2 + S_4 = 2.S_5$;

б) $S_6 + S_7 + S_8 + S_9 = 4.S_5$;

в) $S_6 + S_7 + S_8 + S_9 = S_{10} + S_{11} + S_{12} + S_{13}$.

Решение: а) В задача 4 доказахме, че лицето на четириъгълника, образуван от 4, 5 и 2, е $\frac{3}{25}$ от лицето на $ABCD$. Аналогично и лицето на четириъгълника, образуван от 1, 5 и 3, е $\frac{3}{25}$ от лицето на $ABCD$. Щом двата четириъгълника имат равни лица и номер 5 е общ за тях, то стигаме до $S_1+S_3 = S_2+S_4$. Но от доказаното в задача 3 и 4 следва, че $S_5 = \frac{1}{3}(S_4 + S_5 + S_2) = \frac{1}{3}(S_1+S_5+S_3)$, откъдето $S_2+S_4 = S_1+S_3 = 2.S_5$.

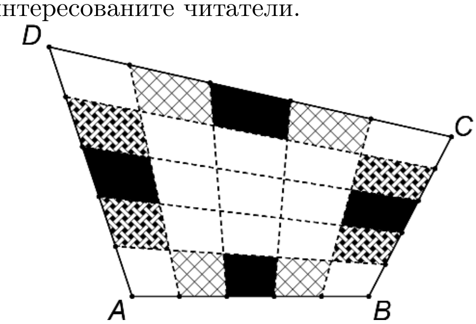
б) Прилагайки задача 2 за четириъгълника $ABCD$, $AM = BN = \frac{1}{5}AB$ и $CP = DQ = \frac{1}{5}CD$ получаваме $S_{MNPQ} = \frac{3}{5}S_{ABCD}$. Но видяхме, че вътрешните отсечки са разделени на равни части, тогава лицето на щрихования четириъгълник или $S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_8 + S_9$ е $\frac{3}{5}S_{MNPQ} = \frac{9}{25}S_{ABCD} = 9S_5$.



От резултата, получен в подточка а), следва, че $S_1 + S_3 + S_2 + S_4 = \frac{4}{25}S_{ABCD}$, откъдето $S_6 + S_7 + S_8 + S_9 = \frac{4}{25}S_{ABCD} = 4.S_5$.

Решението на подточка в) от задача 6 и следващата задача 7, които се получават със сходни разсъждения, ще оставим на заинтересованите читатели.

Задача 7. Всяка от четирите страни на изпъкнал четириъгълник $ABCD$ е разделена на 5 равни части. Точките са свързани както на чертежа до образуването на четириъгълна мрежа. Да се докаже, че трите сбора от лицата на еднакво щрихованите четириъгълници са равни помежду си.



Заключение. Авторът се надява, че читателят ще се заинтригува от геометричните конфигурации и самостоятелно ще разшири темата чрез съставяне на нови задачи и модели или с обобщение на показаните.

Литература

[1] С. Атанасов, *Лица, Олимпийски теми 2004*, УНИМАТ СМБ, 88 – 99.
[S. Atanasov, *Areas, Olympic problems 2004*, UNIMAT SMB, 88 – 99.] (in Bulgarian)

[2] В. В. Прасолов, *Задачи по планиметрии*, Москва, МЦНМО, 2006.
[V. V. Prasolov, *2D geometry problems*, Moscow, МЦНМО, 2006.] (in Russian)