МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2026
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2026
*Proceedings of the Fifty-Fifth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Tryavna, Bulgaria, April 5–9, 2026*

DIVERGENT SERIES – SYNERGY BETWEEN MATHEMATICAL FALLACIES AND SUMMATION METHODS

Kamelia Koleva
Vasil Levski National Military University, Faculty "Logistics and Technologies", Department "Communication and Information Systems"
e-mail: kameliabk72@gmail.com

Summation methods for divergent series are an important element of modern mathematical analysis, meaningfully expanding the classical concept of convergence. The incorrect application of algebraic operations to divergent series leads to mathematical fallacies. The report emphasizes the pedagogical potential of the interaction between summation methods and mathematical fallacies. It is shown that their targeted combination in an educational environment promotes the development of critical and analytical thinking, logical and mathematical culture in students, and an understanding of the important role of definitions and statements in mathematics. Examples of real-world models are considered, demonstrating the applicability of Cesàro's and Abel's summation methods.

Keywords: education, mathematical fallacy, divergent series, summation methods, Cesàro summation, Abel summation

РАЗХОДЯЩИТЕ РЕДОВЕ – СИНЕРГИЯ МЕЖДУ СОФИЗМИ И МЕТОДИ ЗА СУМИРАНЕ

Камелия Колева
Национален Военен Университет „Васил Левски", Факултет „Логистика и технологии"
e-mail: kameliabk72@gmail.com

Методите за сумиране на разходящи редове са важен елемент от съвременния математически анализ, разширявайки класическото понятие за сходимост по смислен начин. Паралелно с това неправилното прилагане на алгебрични действия към разходящите редове води до софизми. Докладът акцентира върху педагогическия потенциал на взаимодействието между методите за сумиране и математическите софизми. Показано е, че целенасоченото им съчетаване в образователна среда допринася за развитието на критично и аналитично мислене, логическа и математическа

https://doi.org/10.55630/mem.2026.55.177-185
2020 Mathematics Subject Classification: 40A05, 40G05, 97E40.

култура у обучаемите, както и за осъзнаване на важната роля на дефинициите и твърденията в математиката. Разгледани са примери за реални модели, демонстриращи приложимостта на методите за сумиране на Чезаро и на Абел.

Ключови думи: образование, софизъм, разходящ ред, методи за сумиране, метод на Чезаро, метод на Абел

1 Въведение

Сумирането е вероятно първата математическа операция, която хората са извършвали и върху която са се замисляли. А темата за безкрайна сума от числа – числовите редове – е била интересна за учените още в Древен Вавилон и в Древна Гърция. Изкушенията на математиците да манипулират с безкрайни суми, т.е. да ги третират като крайни суми, е водело до някои противоречиви и парадоксални резултати. Съвременните определения на понятията сума на ред и неговата сходимост или разходимост, основани на понятието граница, окончателно се формулират в началото на XIX в., вследствие на работите на Болцано (1817 г.) и Коши (1821 г.) [12]. Въпреки това великите математици от XVII в. и XVIII в., колкото и свободно да са манипулирали с редове, са знаели достатъчно добре дали са сходящи. В този период Нютон и Лайбниц са първите, които систематично са използвали редове за приближено решаване на алгебрични и диференциални уравнения, но рядко са използвали разходящи редове. Последните се срещат в работите на Ойлер, Фурие, Поасон, Рамануджан и др. основно чрез формални манипулации без строгото им обосноваване. Но дори и след класическата дефиниция на Коши за ред математиците умишлено са избягвали разходящите редове (Даламбер, Лаплас, Лагранж). Разсъжденията върху разходящи редове според Даламбер били „подозрителни“ даже ако резултатите от тях се съгласуват с истината. Не без основание е забележката на Абел от 1828 г., че разходящите редове са „изобретение на дявола“. Една от основните причини е била, че за времето никой формално не е определил как трябва да се дефинира сумата на разходящ ред. Както още и Ойлер е предвиждал, че „загадките на разходящите редове възникват най-вече не от някаква мистерия в самите разходящи редове като такива, а от нежеланието да се дават формални дефиниции ...“ [4, с. 15].

В края на XIX в., с напредъка на различни области на математическия анализ, теорията на разходящите редове придобива систематично изучаване чрез строго дефинираните методи за сумиране на Чезаро, на Хьолдер, на Абел, на Борел и др. Те намират приложения при изследването на асимптотични разлагания; в теорията на редовете на Фурие; в числения анализ и теорията на апроксимациите; в квантовата механика и квантовата теория на полето; в приближени методи за решаване на задачи в математическата физика и др. Детайлно изследване на различни методи за сумиране с подробни теоретични постановки, както и техни приложения могат да се видят в [4].

Настоящият доклад е продължение на [9, 10, 11], в които чрез използването на подходящи софизми се представя нестандартен и мотивационно наситен методически подход за изучаване на числовите редове. Чрез него се предлага по-лесно усвояване на фундаменталните математически понятия ред, сходимост и сума на ред, повишава се интересът на обучаемите към математиката чрез критично и аналитично мислене. Да припомним, че *математически софизъм* наричаме привидно коректно математическо разсъждение или „доказателство“, което използва скрита логическа или аналитична грешка и води до неправилен извод. В контекста на разходящите редове, математическите софизми възникват при формално прилагане на алгебрични правила извън областта им на валидност.

Тук си поставяме няколко основни цели:

- да разширим класическата дефиниция за сходимост на ред на Коши чрез представяне на някои по-известни и подходящи за целите ни методи за сумиране на разходящи редове;
- да съпоставим умишлените непозволени операции при софизмите със строгите дефиниции при методите за сумиране, и така да се изяснят още по-детайлно грешките при софизмите.
- да покажем, че софизмите имат огромен педагогически потенциал при историческото осмисляне на развитието на математиката и за по-дълбокото разбиране на математическите понятия, както и за разширяване на техния обхват;
- да покажем как абстрактният анализ среща реалния смисъл чрез илюстриране на модели за приложение на методите за сумиране.

2 Теоретични постановки

Първо ще припомним класическата дефиниция за сума на ред [4, 12].

Определение 1. Нека е дадена безкрайната редица от числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$. Безкрайната сума

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

се нарича *числов ред* (накратко *ред*), а отделните събираеми $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ се наричат *членове (елементи)* на реда; a_n – *общ член* на реда.

За реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

образуваме редицата от *частичните (парциалните) му суми* $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$, където $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, ..., $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n, \dots$.

Казва се, че редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е *сходящ със сума* S, и записваме $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$, ако редицата от частичните му суми $\{S_n\}_n^{\infty}$ е сходяща със сума S, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Ако $\{S_n\}_1^{\infty}$ е разходяща ($\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не съществува) се казва, че редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е *разходящ*.

В предисловието на своя труд „Курс по анализ“ (1821 г.) Коши пише, че „разходящите редове нямат сума“ [12, с. 107].

Когато даден ред е разходящ в класическия смисъл (по Коши), за да се получи специфична и полезна информация за него, трябва да се използва подходящ метод за сумиране. Съществуването на единствена алгебрична константа, обикновено наричана „сума“ за разходящ ред, е естествено свързана с асимптотичното му разлагане и не противоречи на разходимостта му в класическия смисъл [1].

Методите за сумиране представляват най-общо правило, операция или функция за конструиране на обобщени суми на редове, обобщени граници на редици или обобщени стойности на несобствени интеграли [2].

Тук се стремим да направим обобщение на класическото определение за сума на ред, което да важи и за разходящи редове. Ще наричаме това понятие „сума“, като ще използваме отново означението $\sum$, за да покажем, че сме съпоставили на безкрайна редица от числа реално число (въпреки че това не е границата на частичните суми, както обикновено).

Определение 2. Ще казваме, че редът $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *се сумира към* s чрез някакъв *метод за сумиране* P и ще записваме

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s\,(P) \quad \text{или} \quad P\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$$

и ще казваме, че редът е P-*сумируем* или *сумируем* чрез P към s (вж. [4, с. 6-7]), [5, с. 462-463]).

Най-разпространените методи за сумиране удовлетворяват следните 4 свойства:

1) *мащабируемост*: Ако $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = s(P)$, то следва, че $\sum\limits_{n=0}^{\infty} ka_n = ks(P)$.

2) *адитивност*: Ако $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = s\,(P)$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = t\,(P)$, то следва, че $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = (s+t)(P)$.

3) *стабилност*: Ако $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = s$ следва, че $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = s - a_0$ и обратно.

4) *регулярност*: Методът за сумиране P се нарича *регулярен*, ако той сумира всеки сходящ ред до неговата обичайна сума, т.е. от $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = s$ следва, че $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = s(P)$.

Първите 3 свойства са въведени от Харди като аксиоми [4, с. 6]. Свойствата 1) и 2) обобщено определят свойството *линейност* на метода. Свойството регулярност възниква естествено за методите, тъй като дава възможност сумиращите методи да се разглеждат като разширения на класическата сходимост, а не като нейни алтернативи.

В математическия анализа и в неговите приложения обикновено се използват регулярни линейни методи за сумиране. Ще разгледаме два от тях, които представляват особен интерес за приложенията [8, с. 63].

Определение 3. (**метод на Чезаро – метод на средните аритметични**) За числовия ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ разглеждаме редицата $S_1, S_2, \ldots, \ S_n, \ldots$ от частичните му суми и редицата

$$c_1 = S_1, \ c_2 = \frac{S_1 + S_2}{2}, \ c_3 = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{3}, \ldots$$

$$c_n = \frac{S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k, \ \ldots$$

от *средните аритметични* на частичните суми. Ако съществува $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = s$, то казваме, че даденият ред е *сумируем по Чезаро* или C-сумируем и записваме $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s(C)$. Числото s се нарича *обобщена (в смисъл на Чезаро) сума* за реда или C-сума за реда. Използват се и означенията $(C, \ 1)$-сума или C_1-сума (вж. [4, с. 7], [5, с. 464]).

В [7, с. 8] е представено и матричното дефиниране на метода на Чезаро от първи ред – C_1.

Определение 4. (**метод на Абел – метод на степенните редове**) За числовия ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ разглеждаме степенния ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$. Ако последният ред е сходящ за всяко x от интервала $(0, \ 1)$ и неговата сума $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$ има граница $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = s$, то казваме, че даденият ред е *сумируем по Абел* или A-сумируем и записваме $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s(A)$. Числото s се нарича *обобщена (в смисъл на Абел) сума* за реда (вж. [4, с. 7], [8, с. 64]).

Методът на Абел понякога се нарича и **метод на Поасон**, или **метод на Поасон-Абел**, след като Поасон е използвал същия метод за сумиране на редове на Фурие [4, с. 8].

3 Примерни педагогически ситуации

Пример 1 [4, с. 2, с. 6, с. 94]. За известния ред на Гранди $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ намираме сумата му s по 3 различни начина:

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0;$
- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \ldots = 1;$
- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = 1 - (1 - 1 + 1 - \ldots) = 1 - s \Rightarrow 2s = 1 \Rightarrow s = \dfrac{1}{2}$.

Така получаваме три различни суми за реда, т.е. $s = 0 = 1 = \frac{1}{2}!$, което води до софизъм!

След анализиране на реда на Гранди според определение 1 получаваме за частичните му суми:

$$S_1 = 1,\ S_2 = 1 - 1 = 0,\quad S_3 = 1 - 1 + 1 = 1,\ \ldots\ ,\ S_n = \begin{cases} 1, & \text{ако } n \text{ е нечетно} \\ 0, & \text{ако } n \text{ е четно} \end{cases},\ \ldots$$

откъдето следва, че редът е разходящ, понеже $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не съществува (редицата има две точки на сгъстяване 0 и 1). Следователно трите манипулации, които извършваме с него, са недопустими и оттам следва грешното заключение като софизъм.

Ще покажем как методът на Чезаро позволява да присвоим „легално“ една от горните три стойности за сума на реда на Гранди. Разглеждаме редицата от средноаритметичните на частичните суми за реда:

$$c_1 = S_1 = 1,\ c_2 = \frac{S_1 + S_2}{2} = \frac{1}{2},\ c_3 = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{3} = \frac{2}{3},\ \ldots\ ,\ c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k, \ldots$$

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} = \frac{(-1)^{k-1} + 1}{2},\ k \geq 1$$

$$c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} + 1}{2} = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left[(-1)^{k-1} + 1\right] = \frac{1}{2n}\left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} 1\right)$$

$$c_n = \frac{1}{2n}(S_n + n) = \frac{S_n}{2n} + \frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{2}\ \ (\text{ понеже } |S_n| \leq 1)$$

Получихме, че по метода на Чезаро $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \frac{1}{2}\ (C)$.

Сега ще проверим какво се случва с реда на Гранди

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1},$$

като приложим метода на Абел. Съставяме степенния ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-x)^{k-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots,$$

който е сходящ за всяко $0 < x < 1$ и има сума $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Тогава

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Потвърждава се, че редът на Гранди има същата сума и по метода на Абел, т.е. $1-1+1-1+\ldots = \frac{1}{2}\ (A)$. Получената сума по двата метода може да се използва, за да се разширят знанията за геометричния ред, т.е. да се направи негово продължение. При класическото сумиране знаем, че геометричният ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n + \cdots$$

е сходящ със сума $S = \frac{1}{1-q}$ при $|q| < 1$, т.е. $1 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1-q}$. Ако заместим в последното равенство с $q = -1$, получаваме отново $1-1+1-1+\ldots = \frac{1}{2}$.

Така чрез методите на Чезаро и Абел ние разширяваме областта на сходимост на геометричния ред от $(-1,\ 1)$ на $[-1,\ 1)$.

Пример 2 (вж. [5, с. 465]). Да разгледаме реда $1-2+3-4+5-\dots$.

За да намерим сумата му s прилагаме два различни начина за комбиниране на членовете му по двойки:

- $s=(1-2)+(3-4)+(5-6)+\dots=-1-1-1-\dots=-\infty$;
- $s=1+(-2+3)+(-4+5)+\dots=1+1+1+\dots=\infty$.

Така стигаме до софизъм, според който положителната и отрицателната безкрайност са равни: $s=-\infty=+\infty$!

За частичните суми на реда имаме:

$S_1=1,\quad S_2=1-2=-1,\quad S_3=1-2+3=2,\quad S_4=S_3-4=-2,$

$S_5=S_4+5=3,\ \dots$

Лесно се съобразява, че $|S_n|\to\infty$ при $n\to\infty$, т.е. редицата от частичните суми е разходяща, следователно редът не е сходящ.

Да видим как бихме могли да присвоим „сума“ за реда чрез някой метод за сумиране. Прилагаме метода на Чезаро, като за целта разглеждаме редицата от средните аритметични на горните частични суми:

$$c_1=S_1=1, c_2=\frac{S_1+S_2}{2}=0,\ c_3=\frac{S_1+S_2+S_3}{3}=\frac{2}{3},\ c_4=0,\ c_5=\frac{3}{5},\ c_6=0,$$

$$c_7=\frac{4}{7},\dots,\ c_n=\begin{cases}0, & \text{ако } n \text{ е четно}\\ \dfrac{n+1}{2n}, & \text{ако } n \text{ е нечетно}\end{cases},\ \dots$$

Вижда се, че редицата от средните аритметични суми по Чезаро не е сходяща, тъй като има две точки на сгъстяване 0 и $\frac{1}{2}$ при $n\to\infty$. Следователно даденият разходящ ред няма обобщена сума в смисъл на Чезаро.

По метода на Абел съпоставяме на дадения ред степенния ред

$$\sum_{k=1}^{\infty}k(-x)^{k-1}=1-2x+3x^2-4x^3+\cdots$$

който е сходящ за всяко $0<x<\ 1$ и има сума $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$. Тогава

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\frac{1}{(1+1)^2}=\frac{1}{4}.$$

Така получихме, че даденият ред не е сходящ в класическия смисъл, както и няма сума по метода на Чезаро, но има обобщена сума по метода на Абел, като

$$1-2+3-4+5-\dots=\frac{1}{4}\ (A).$$

С този пример проверихме твърдението, че методът на Абел е „по-силен“ от метода на Чезаро (вж. [8, с. 66], [4, с. 108]).

Разгледаните от нас примери са не само математически софизми и не остават само в сферата на математическия анализ. Методите за сумиране на Чезаро и Абел в тях не правят разходящите редове сходящи, а могат да опишат смислено реални модели. Тези методи извличат устойчива средна стойност при динамични системи или при процеси, които осцилират и не са в покой, но са предсказуеми във времето.

Редът от Пример 1 се появява в системите за превключване (Switching systems – вж. [6]), които често генерират 2-периодични траектории (например реле, термостат и др.). Тези системи естествено водят до периодично превключване между два дискретни режима, т.е. до цикъл от вида $(x_1, x_2,\ x_1, x_2,\ \ldots)$. Специален случай е редицата $(1,\ -1,\ +1,\ -1,\ \ldots)$, която съответства на реда на Гранди (Пример 1). За него класическата граница не съществува, т.е. системата няма стационарна точка в обичайния смисъл. Но за реда съществува средната стойност по Чезаро, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = 0$, което означава, че трептенето в системата е симетрично и центрирано около нулата.

Частичните суми на реда $1-1+1-1+\cdots$, се колебаят между 0 и 1, а за редицата $(1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots)$ средната стойност на Чезаро $c_n \to \dfrac{1}{2}$ описва дългосрочното поведение на дискретната система чрез осредняване във времето (времето се разпределя равномерно между двете състояния).

Пример 2 има интересна интерпретация в икономическия „модел на паяжината“ (Cobweb model – вж. [3]). Той описва динамиката на цената и количеството и води до редици от вида $x_t = A(-\lambda)^t$. Когато системата е нестабилна, т.е. $|\lambda| > 1$, отклоненията от равновесието се описват чрез редицата $x_t = t(-1)^t$, която при сумиране води до разходящия ред $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots$. Членът „$+n$“ се интерпретира като „увеличение“, а „$-n$“ като „намаление“, при което абсолютната стойност расте с времето. Степенният ред $\sum\limits_{t=1}^{\infty} x_t r^t,\ 0 < r < 1$ има икономическа интерпретация като настоящата стойност на осцилиращите отклонения. Това е точно Абеловата трансформация на реда и

$$1 - 2 + 3 - 4 + \ldots = \frac{1}{4},$$

което дава дисконтирания дългосрочен ефект на нестабилните колебания (ефект, оценен чрез намаляващи във времето тегла) и регуляризираната корекция на равновесието (корекция, получена чрез аналитично удължаване на иначе разходящия ред).

4 Заключение

В доклада представяме разходящите редове като естествена среда за възникване на математически софизми. В синергия с тях методите за сумиране на Чезаро и Абел илюстрират не само класическата дефиниция за сходимост на ред, а и как част от формалните алгебрични операции могат да бъдат коректно интерпретирани в по-обхватни и строго дефинирани понятия за сумиране. Представените примери, в които целенасочено се съчетават софизми и сумиращи методи, са ценен дидактически ресурс за развитието на критично и аналитично мислене у студентите, осмисляне на ролята на дефинициите и областта на приложимост на математическите твърдения. Разглеждането на разходящите редове през призмата на софизмите и методите за сумиране обогатява както теоретичната перспектива, така и по ефективен начин интегрира интуиция, формализъм и строгост в съвременното математическо образование. Примерите за разходящи редове, свързаните с тях софизми и обобщените методи за сумиране не са само формални конструкции, а имат смислена интерпретация в широк кръг контексти, където класическите понятия за сходимост се оказват недостатъчни. В този смисъл те разкриват потенциала на обобщените сумиращи подходи като инструмент за описание и анализ на разнообразни реални процеси.

Литература

[1] J. Q. Chagas, J. A. T. Machado and A. M. Lopes. Overview in Summabilities: Summation Methods for Divergent Series, Ramanujan Summation and Fractional Finite Sums, *Mathematics,* **9** (2021), 2–38.

[2] Encyclopedia of Mathematics, „Summation methods“ [Online]. Available: `http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Summation_methods&oldid=48907`.

[3] G. Gandolfo. Economic Dynamics, 4th ed., Berlin, Germany: Springer, 2009.

[4] G. H. Hardy. Divergent Series. Oxford, Clarendon Press, 1949.

[5] K. Knopp. Theory And Application Of Infinite Series, Blackie And Son Limited, 1954.

[6] D. Liberzon. Switching in Systems and Control, Boston, MA, USA: Birkhäuser, 2003.

[7] E. Malkowsky, V. Rakočević. Summability methods and applications. Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts, vol. 24, Belgrade, 2020.

[8] В. А. Илин, В. А. Садовничи, Бл. Х. Сендов. Математически анализ, втора част. София, Наука и изкуство, 1989. [V. A. Ilin, V.A.Sadovnichi, Bl. H. Sendov. Matematicheski analiz, vtora chast. Sofiya, Nauka i izkustvo, 1989.] (in Bulgarian)

[9] К. Колева. Активизиране на обучението по Висша математика чрез използването на софизми, *VI International Scientific and Technical Conference „Engineering. Technologies. Education. Security“*, V. Tarnovo, (2018), 256–259. [K. Koleva. Aktivizirane na obuchenieto po Vissha matematika chrez izpolzvaneto na sofizmi, *VI International Scientific and Technical Conference „Engineering. Technologies. Education. Security“*, V. Tarnovo, (2018), 256–259.] (in Bulgarian)

[10] К. Колева. „Приятната“ и „неприятната“ безкрайност при числовите редове, *Сборник доклади от Годишната университетска научна конференция на НВУ „Васил Левски“,* Велико Търново, (2025), 163–175. [K. Koleva. „Priyatnata“ i „nepriyatnata“ bezkraynost pri chislovite redove, *Sbornik dokladi ot Godishnata universitetska nauchna konferentsiya na NVU „Vasil Levski“*, Veliko Tarnovo, (2025), 163–175.] (in Bulgarian)

[11] К. Колева. Софизмите като средство за развитие на рефлексивната дейност на курсантите, *Сборник доклади от Годишната университетска научна конференция на НВУ „Васил Левски“,* Велико Търново, (2024), 117-129. [K. Koleva. Sofizmite kato sredstvo za razvitie na refleksivnata deynost na kursantite, *Sbornik dokladi ot Godishnata universitetska nauchna konferentsiya na NVU „Vasil Levski“*, Veliko Tarnovo, (2024), 117–129.] (in Bulgarian)

[12] Г. М. Фихтенгольц. Основы математического анализа, том 2, Москва, Наука, 1968. [G. M. Fihtengolts. Osnovy matematicheskogo analiza, tom 2, Moskva, Nauka, 1968.] (in Russian)