МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2026
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2026
Proceedings of the Fifty-Fifth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Tryavna, Bulgaria, April 5–9, 2026

THE ELLIPSE, PARABOLA, AND HYPERBOLA AS SECTIONS OF A ROTATIONAL CONE WITH A PLANE

Irena A. Parvanova[1], Yana Kancheva[2]
[1]Department of Applied Mathematics and Informatics, Technical University of Sofia, Bulgaria,
[2]Dept. of Applied Geodesy, Faculty of Geodesy, University of Architecture, Civil Engineering and Geodesy, Sofia, Bulgaria
e-mails: [1]irena.parvanova@tu-sofia.bg, [2]kancheva_fgs@uacg.bg

The paper examines problems illustrating the three main cases of sections of a rotational cone with a plane, solved by the methods of descriptive geometry. The examples are presented in cabinet projection and can be useful in illustrating results achieved by the means of analytical geometry and in teaching descriptive geometry to university students of engineering majors.

Keywords: descriptive geometry; parallel projection; plane sections of a rotational cone

ЕЛИПСАТА, ПАРАБОЛАТА И ХИПЕРБОЛАТА КАТО СЕЧЕНИЯ НА РОТАЦИОНЕН КОНУС С РАВНИНА

Ирена Първанова, Яна Кънчева
[1]Факултет „Приложна математика и информатика“, Технически университет – София
[2]Катедра „Приложна геодезия“, Геодезически факултет, Университет по строителство, архитектура и геодезия, София
e-mails: [1]irena.parvanova@tu-sofia.bg, [2]kancheva_fgs@uacg.bg

Статията разглежда задачи, илюстриращи трите основни случая на сечения на ротационен конус с равнина, решени с методите на дескриптивната геометрия. Показаните примери са изпълнени в кабинетна проекция и могат да бъдат от полза при онагледяването на резултати, постигнати със средствата на аналитичната геометрия и в обучението по дескриптивна геометрия на студенти от инженерните специалности на висшите учебни заведения.

Ключови думи: дескриптивна геометрия, успоредно проектиране, равнинни сечения на ротационен конус

---

https://doi.org/10.55630/mem.2026.55.198-204
2020 Mathematics Subject Classification: 51N05, 51M04, 53A04, 51M04, 53A04.

Въведение: Темата „Конични сечения“ присъства във всички курсове по Аналитична и Дескриптивна геометрия във висшите учебни заведения, а в последните години е част и от учебните програми по математика в средния курс за учениците – профил „Математика“. В тази статия авторите показват три примера, изработени в кабинетна проекция, като се надяват направените чертежи да бъдат от полза при онагледяването на важните елементи на елипсата, параболата и хиперболата и начина на намирането им при пресичане на ротационен конус с равнина.

Изложение: Елипсата, параболата и хиперболата са документирано представени като сечения на ротационен конус с равнина за първи път от великия немски художник, математик и изкуствовед Албрехт Дюрер в първата математическа книга, издадена на немски език – „Underweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt in Linen ebnen unnd gantzen corporen“ , в далечната 1514 година. За целта Дюрер използва метода на спомагателните успоредни равнини и ортогонално проектиране върху две взаимно перпендикулярни равнини – метод, придобил впоследствие извесност като Монжова проекция (най-вече в държавите от източния блок). Трите показани в статията примери са решени в кабинетна проекция с цел да се постигне добра нагледност на получените резултати. Кабинетната проекция е вид наведена аксонометрия, при която проекционната (аксонометрична) равнина се поставя успоредна или съвпадаща с втора координатна равнина ν. По този начин фигурите, които се намират в ν и в равнини, успоредни на нея, се изобразяват в истинския си вид. Секущата равнина α и в трите примера е поставена перпендикулярна на втора координатна равнина с цел сечението да бъде намерено по най-лесен начин и след построяване му равнината да бъде завъртяна до съвпадане с ν и да бъде показан истинският вид на получената крива. За намирането на точки от сечението е използвана вторичната проекция на конуса във втора координатна равнина и прободите на образувателните на конуса със секущата равнина. Изработването на чертежите изисква познаване на свойствата на успоредното проектиране и основни конструкции, използвани в дескриптивната геометрия, които могат да бъдат намерени в [3] и [4]. Подробно описани и решени задачи за изобразяване на сечението на ротационен конус с равнина в монжова проекция могат да бъдат намерени в [1], [2] и [5].

Построенията, направени при изработването на първия чертеж, са описани подробно, като са отбелязани най-важните характеристики на получената крива. Към изработването на втория и третия чертеж са отбелязани важните разлики и характерните особености на другите две сечения.

Пример 1. В кабинетна проекция да се изобрази ротационен конус с връх $V(3;14;8)$ и основа в първа координатна равнина μ с радиус $R = 3$. Да се изобрази сечението на конуса с равнината $\alpha[8;\infty;6]$ и да се покаже истинският му вид.

Построенията са извършени в следната последователност:

1. Изобразен е аксонометричният кръст на кабинетна проекция и са нанесени дадените точка V и дирите на равнината α. Тъй като равнината α е успоредна на оста y на координатната система, то тя е перпендикулярна на втора координатна равнина ν и тогава $n'_\alpha \equiv \alpha'_2$. Това означение показва, че вторите вторични проекции на всички елементи от равнината α са върху нейната втора диря.

2. Построена е проекцията на основата на конуса – елипсата k' с център V'_1,

определена от двойката спрегнати диаметри $E'F'$ и $G'H'$ – проекции на диаметрите на окръжността, успоредни на координатните оси на първа координатна равнина μ.

3. Построени са контурните образувателни на конуса – допирателните към елипсата, минаващи през проекцията на върха на конуса – точката V'. Определена е видимата част на основата.

4. Намерена е втората вторична проекция на конуса – равнобедрен триъгълник $E'_2F'_2V'_2$. Тъй като секущата равнина е перпендикулярна на ν, то търсеното сечение във втора координатна равнина се вижда като отсечка – част от втората диря на равнината α.
Ъгълът $\varphi = \sphericalangle(n'_\alpha, x')$ е линеен ъгъл на двустенния ъгъл $\sphericalangle(\alpha, \mu)$.
Ъгълът на наклона на образувателните на конуса спрямо равнината на основата му е означен с ϕ, $\phi = \sphericalangle(n'_\alpha, x')$.
От връзката между тези два ъгъла се определя видът на сечението, като възможностите са три:
- При $\varphi < \phi$ сечението е елипса или част от елипса. Тогава секущата равнина пресича всички образувателни на конуса или техните продължения.
- При $\varphi = \phi$ сечението е парабола. Тогава секущата равнина е успоредна на една образувателна на конуса и пресича останалите.
- При $\varphi > \phi$ сечението е хипербола. Тогава секущата равнина е успоредна на две образувателни на конуса и пресича останалите.
В случая сечението е елипса, тъй като $\varphi < \phi$.

5. Намерени са пресечните точки на втората диря на равнината α с бедрата на триъгълника $E'_2F'_2V'_2$ – точки A'_2 и B'_2, като $|A'_2B'_2| = 2a$ е дължината на голямата ос на елипсата.
Голямата ос на елипсата лежи върху пресечната права s на равнина β, минаваща през оста на конуса и перпендикулярна на секущата равнина α с равнината α. Тъй като оста на симетрия на търсеното сечение – правата s е успоредна на втора координатна равнина, то проекциите на отсечките, лежащи на нея, са с реалната си дължина.

6. Намерена е средата на отсечката $A'_2B'_2$ – $C'_2 \equiv D'_2$. Точките C и D са краищата на малката ос на елипсата. Във втора координатна равнина ν малката ос се проектира в точка, тъй като е перпендикулярна на нея.
За намиране на допълнителни точки от сечението могат да се намерят още прободи на образувателни на конуса с равнината α, както и да се използва съответствието между проекцията на основата на конуса и проекцията на сечението. Това съответствие е хомология с център – точка V', ос – m'_α и двойка съответни точки – F' и A'.

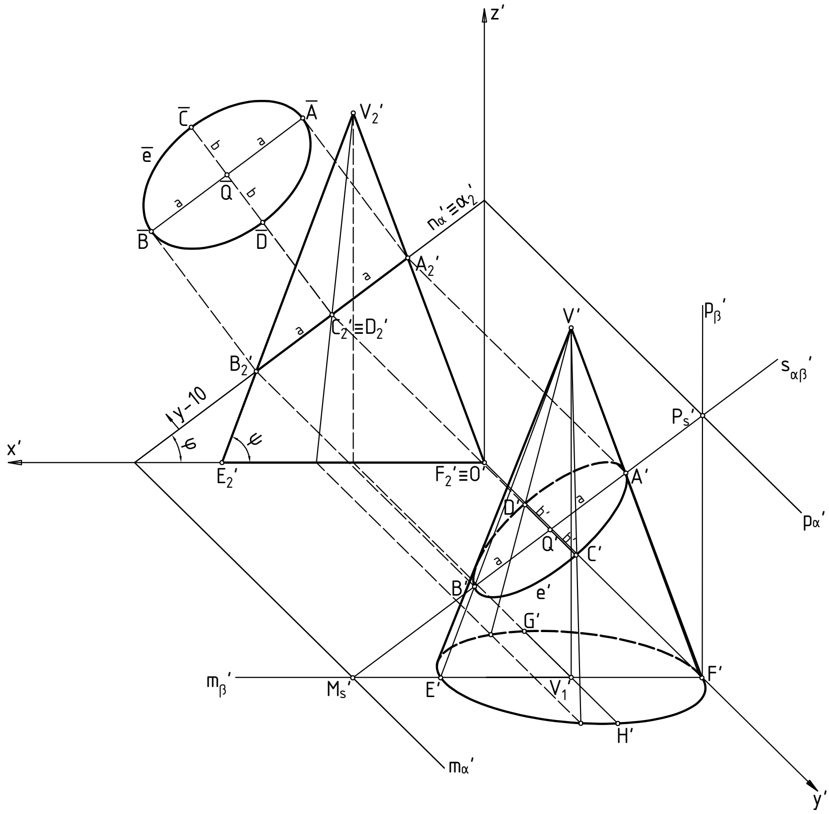
7. Намерени са аксонометричните проекции на върховете на елипсата – точки A', B', C', D', като за целта са използвани образувателните на конуса. Отсечките $A'B'$ и $C'D'$ са двойка спрегнати диаметри на аксонометричната проекция на елипсата, тъй като при успоредно проектиране се запазва успоредността, запазват се пропорциите, но не се запазват ъглите.

8. Построена е проекцията на сечението, като за отделянето на видимата от невидимата му части са отбелязани допирните точки на елипсата до контурните образувателни на конуса. За оформянето на елипсата e' могат бъдат намерени допълнителни точки, както и да се намерят осите, като се приложи конструкцията на

Риц.

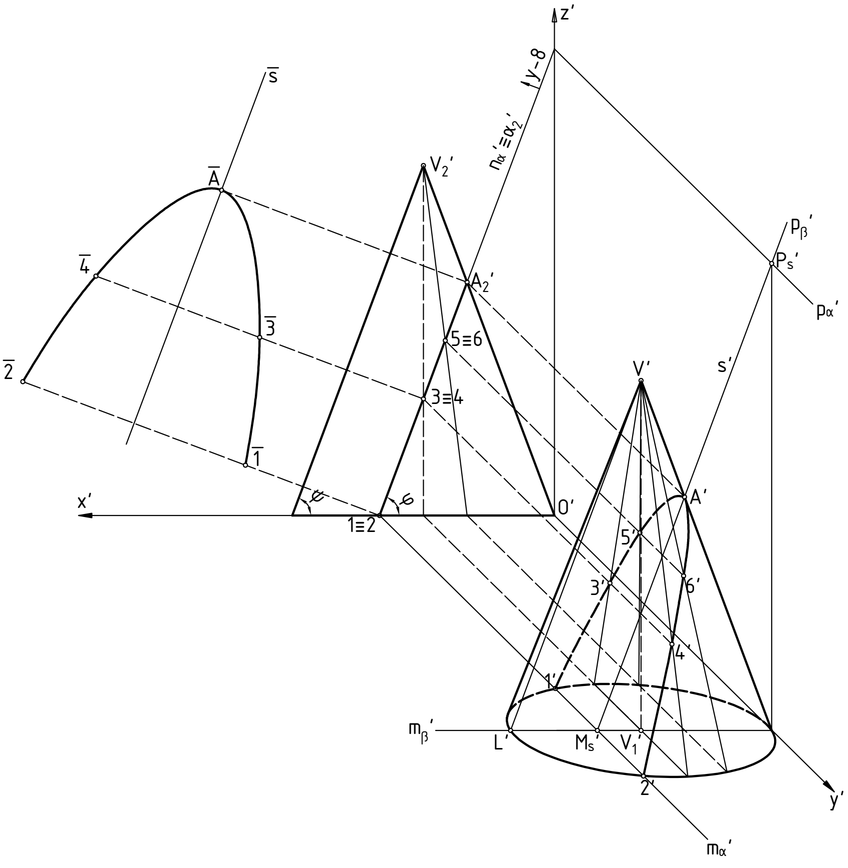
9. За намирането на истинския вид на сечението – елипсата $\bar{e}$ – равнината α е завъртяна на 90° до съвпадане с ν, след което е плъзната към проекцията на конуса. Точките $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ и $\bar{D}$ са склопените положения на върховете на елипсата до ν и са получени, като са отчетени y-координатите им от аксонометричния чертеж. Дължината $|\bar{C}\bar{D}| = 2b$ е реалната дължина на малката ос на елипсата.

Построенията са показани на чертеж 1.



Чертеж 1

Пример 2. В кабинетна проекция да се изобрази ротационен конус с връх $V(3;14;8)$ и основа в първа координатна равнина μ с радиус $R=3$. Да се изобрази сечението на конуса с равнина $\alpha[4;\infty;z_\alpha]$, което да бъде парабола, и да се покаже истинският му вид.

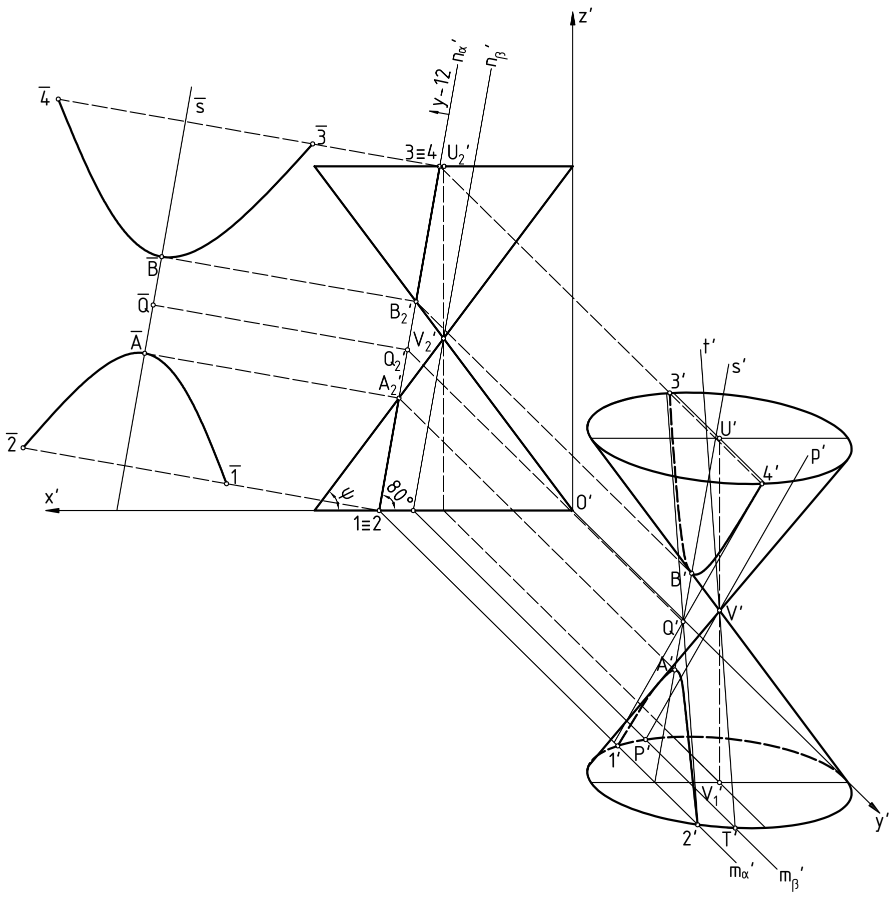


Чертеж 2

Построенията при изработването на чертежа към този пример са направени в същата последователност, както в първия пример. При построяването на втората диря на равнината α е използвано условието сечението да се получи парабола, като $n'_\alpha \equiv \alpha'_2$ е построена успоредна на едно от бедрата на вторичната проекция на конуса. Пресечната точка на дирята на равнината α с другото бедро на $\Delta E'_2F'_2V'_2$ е вторичната проекция на върха на параболата – точката A. Намерени са двете пресечни точки на първата диря на равнината α с основата на конуса и още 4 произволни точки, като са използвани прободите на образувателните на конуса със секущата равнина. Показана е и проекцията на оста на параболата – s', както и аксонометричната проекция на образувателната на конуса, на която равнината α е успоредна

– $V'L'$.
Построенията са показани на чертеж 2.

Пример 3. В кабинетна проекция да се изобрази двоен ротационен конус с връх $V(3;18;4)$ и основа в първа координатна равнина μ с радиус $R = 3$. Да се изобрази сечението на конуса с равнината $\alpha[4.5;\infty;z_\alpha]$, ако $\sphericalangle(\alpha,\mu) = 80^\circ$, и да се покаже истинският му вид.



Чертеж 3

При постояването на проекцията на конуса са изобразени две еднакви елипси с центрове V_1' и U', след което са начертани контурните образувателни. Видима е горната основа на конуса и предната част от околната му повърхнина.
За построяването на втората диря на равнината α е използвано, че $\sphericalangle(\alpha,\mu) = \sphericalangle(n'_\alpha, x') = 80^\circ$.
Тъй като $\varphi > \phi$, то сечението е хипербола. Пресечните точки на n'_α с контурните за

вторичната проекция на конуса образувателни са вторичните проекции на върховете на хиперболата – точки A_2' и B_2'.
Намерени са пресечните точки на равнината α с двете основи на конуса. Получените 6 точки еднозначно определят хиперболата.
Показана е и проекцията на реалната ос на хиперболата – s'.
За намирането на асимптотите на хиперболата е построена равнина β, която минава през върха на конуса и е успоредна на равнината α. Тази равнина пресича конуса в две образувателни – VT и VP. Тези две образувателни са направленията на асимптотите на хиперболата. Намерен е центърът на хиперболата – точката Q – среда на отсечката AB. Построени са прави, минаващи през точка Q и успоредни на VT и VP. Това са асимптотите на хиперболата.

Чертежите са изработени с помощта на AUTOCAD.

Благодарности. Авторите биха искали да благодарят на НИС на ТУ - София за финансовата подкрепа.

Литература

[1] Радулов, В., Първанова, И., *Ръководство по дескриптивна геометрия, Равнинни сечения,*(2006) УАСГ, ISBN 13978-954-724-031-5
Radulov, V., Parvanova, I., 2006. *Descriptive geometry, Plane sections, Textbook* , UACG, (in Bulgerian)

[2] Радулов, В., Първанова, И., 2012. *Ръководство по дескриптивна геометрия, Равнинни сечения,*(2012) Регалия 6, ISBN 978-954-745-220-6
Radulov, V., Parvanova, I., 2012. *Descriptive geometry, Plane sections, Textbook* , Regalia 6,(in Bulgerian)

[3] Чорбаджиев, Д., *Дескриптивна геометрия*, УАСГ, (1992).
Chorbadgiev, D., 1992. *Descriptive geometry*, UACG (in Bulgerian)

[4] Данаилова, Н., Велинова, Л., Колев, М., *Аксонометрия, Курсови и изпитни задачи* , УАСГ, ISBN 978-954-724-035-4 (2012).
Danailova, N., Velinova, L., Kolev, M., 2012. *Axonometry, Textbook* , UACG (in Bulgerian)

[5] Зарева, Ц., 2013. *Учебно помагало по дескриптивна геометрия, Равнинни сечения, сенки, отвори,*(2013) УАСГ, ISBN 978-954-724-064-3
Zareva, C., 2013. *Descriptive geometry, Plane sections, shadows, perforations, Textbook* , UACG,(in Bulgerian)