

*МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2026
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2026
Proceedings of the Fifty-Fifth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Tryavna, Bulgaria, April 5–9, 2026*

**AUXILIARY PROJECTION PLANES IN SOLVING SOME
METRIC PROBLEMS**

Irena A. Parvanova¹, Yana Kancheva²

¹Department of Applied Mathematics and Informatics, Technical University of Sofia, Bulgaria,

²Dept. of Applied Geodesy, Faculty of Geodesy, University of Architecture, Civil Engineering
and Geodesy, Sofia, Bulgaria

e-mails: ¹irena.parvanova@tu-sofia.bg, ²kancheva_fgs@uacg.bg

The article considers four problems on constructing a transversal and an axis of crossed lines and one problem on constructing a section of a pyramid with a plane and determining the distance from a point to a plane, solved using the methods of descriptive geometry. The examples shown are presented in Monge projection and axonometry and can be useful in illustrating results achieved by the means of analytical geometry and in teaching descriptive geometry to university students of engineering majors.

Keywords: metric problems, crossed lines, axis, transversal

**ПОМОЩНИ ПРОЕКЦИОННИ РАВНИНИ ПРИ
РЕШАВАНЕТО НА НЯКОИ МЕТРИЧНИ ЗАДАЧИ**

Ирена Първанова¹, Яна Кънчева²

¹Факултет „Приложна математика и информатика“, Технически университет – София

²Катедра „Приложна геодезия“, Геодезически факултет, Университет по строителство,
архитектура и геодезия, София

e-mails: ¹irena.parvanova@tu-sofia.bg, ²kancheva_fgs@uacg.bg

Статията разглежда четири задачи за построяване на трансверзала и ос на кръстосани прави и една задача за построяване на сечение на пирамида с равнина и определяне на разстояние от точка до равнина, решени с методите на дескриптивната геометрия. Показаните примери са изпълнени в монжова проекция и аксонометрия и могат да бъдат от полза при изработването на чертежи, онагледяващи решаването на редица задачи в стереометрията и в обучението на студенти от инженерните специалности на висшите учебни заведения.

Ключови думи: метрични задачи, кръстосани прави, ос, трансверзала

<https://doi.org/10.55630/mem.2026.55.205-213>

2020 Mathematics Subject Classification: 51N05, 51M04, 53A04, 51M04, 53A04.

Въведение: Задачи за построяване на трансверзала на кръстосани прави и намиране на разстоянието между кръстосани прави са важна част от решаването на редица задачи в инженерните науки и са част от учебния материал в курса по стереометрия за 11. клас – профил „Математика“. В тази статия авторите показват няколко примера, решени в монжова проекция и аксонометрия, като се надяват направените чертежи да бъдат от полза при правилното и точно построяване на перпендикуляр от точка към равнина и на ос и трансверзала на кръстосани прави в задачи от курса по стереометрия и в курсовете по дескриптивна геометрия.

Изложение: Два от показаните примери са изпълнени в монжова проекция – основен проекционен модел, използван най-често от инженери и архитекти. Останалите три примера са изработени в кавалиерна и кабинетна проекция с цел по-добра нагледност и да могат да бъдат използвани като основни конструкции при изработването на чертежи към задачи в стереометрията. Изработването на чертежите изисква познаване на свойствата на успоредното проектиране и основни конструкции, използвани в дескриптивната геометрия, които могат да бъдат намерени в [3]. При разработването на първите две задачи правите са избрани така, че да се покажат предимствата на допълнителното ортогонално проектиране с цел максимално опростяване на построенията. Когато права се постави перпендикулярна на дадена равнина, то ортогоналната ѝ проекция в равнината е точка. Когато равнина се постави перпендикулярна на проекционна равнина, то равнината се проектира в права. Когато отсечка е успоредна на проекционна равнина, то при проектирането се запазва нейната дължина. С поставянето на основните геометрични обекти в частно положение спрямо проекционна равнина се опростява решението на редица задачи в дескриптивната геометрия – пробод на права с равнина, основните метрични задачи, намирането на сечение на тяло с равнина, намирането на истински вид на равнинна фигура и други. Основни конструкции, използвани при работа с трета и четвърта помощни проекционни равнини в монжова проекция могат да бъдат разгледани в [3] и [1].

Пример 1. В монжова проекция да се изобрази трансверзалата на правите $a[A(0; 7; 1.5), N^a(8; 0; 1.5)]$ и $b[B(4; 6; 7), M^b(-5.5; 1.5; 0)]$, която минава през точката $T(2; 3; 2.5)$. Да се определи дължината на частта от трансверзалата, заключена между двете прави.

Построенията са извършени в следната последователност:

1. Изобразени са проекциите на дадените прави a и b и точката T .
2. Въведена е трета помощна проекционна равнина π , която е перпендикулярна едновременно на първа проекционна равнина μ и на дадената права a . Това е възможно, тъй като правата a е успоредна на първа проекционна равнина μ . $x_{1,3} \equiv \pi_1$ е построена на произволно място, перпендикулярна на a_1 .
3. Намерена е третата проекция на правата a – точката a_3 , на правата b – правата b_3 и на точката T – T_3 .
4. Построена е третата проекция на трансверзалата на двете прави – правата t_3 , която минава през точките a_3 и T_3 .
5. Отбелязана е пресечната точка на t_3 и a_3 – Q_3 и чрез ординали са намерени първа и втора проекции на точката Q – Q_1 и Q_2 .

6. Построени са първа и втора проекции на търсената трансверзала, като $t_1 = P_1Q_1$, $t_2 = P_2Q_2$.

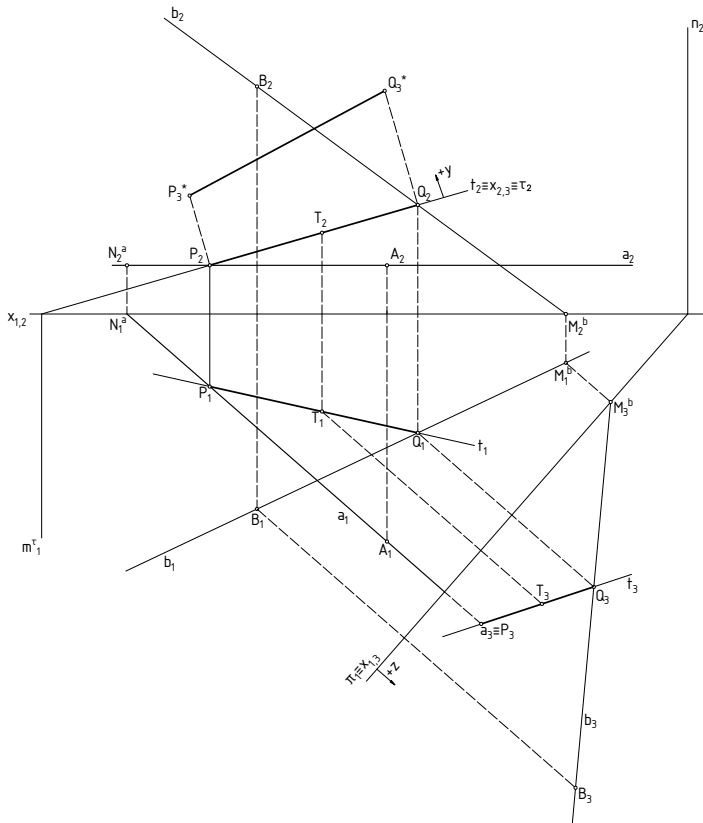
7. Отбелязани са проекциите на пресечната точка на правата t с правата a – точка P . $P_1 = t_1 \cap a_1$, $P_2 = t_2 \cap a_2$.

8. За намирането на дължината на отсечката PQ е въведена нова помощна проекционна равнина τ , която минава през правата t и е перпендикулярна на втора проекционна равнина ν . $x_{2,3} \equiv \tau_2$.

9. $|PQ| = |P_3^*Q_3^*|$.

Показаната задача е изключително важна в пътното строителство и развива умения у студентите за работа с помощни проекционни равнини. За решаването ѝ може да се използва и стереометричното решение, като се построят две равнини – α , минаваща през правата a и точката T и β , минаваща през правата b и точката T , след което се намери пресечната им права – това е търсената трансверзала. Така обаче, чертежът се наговарва със значително повече построения.

Построенията са показани на чертеж 1.

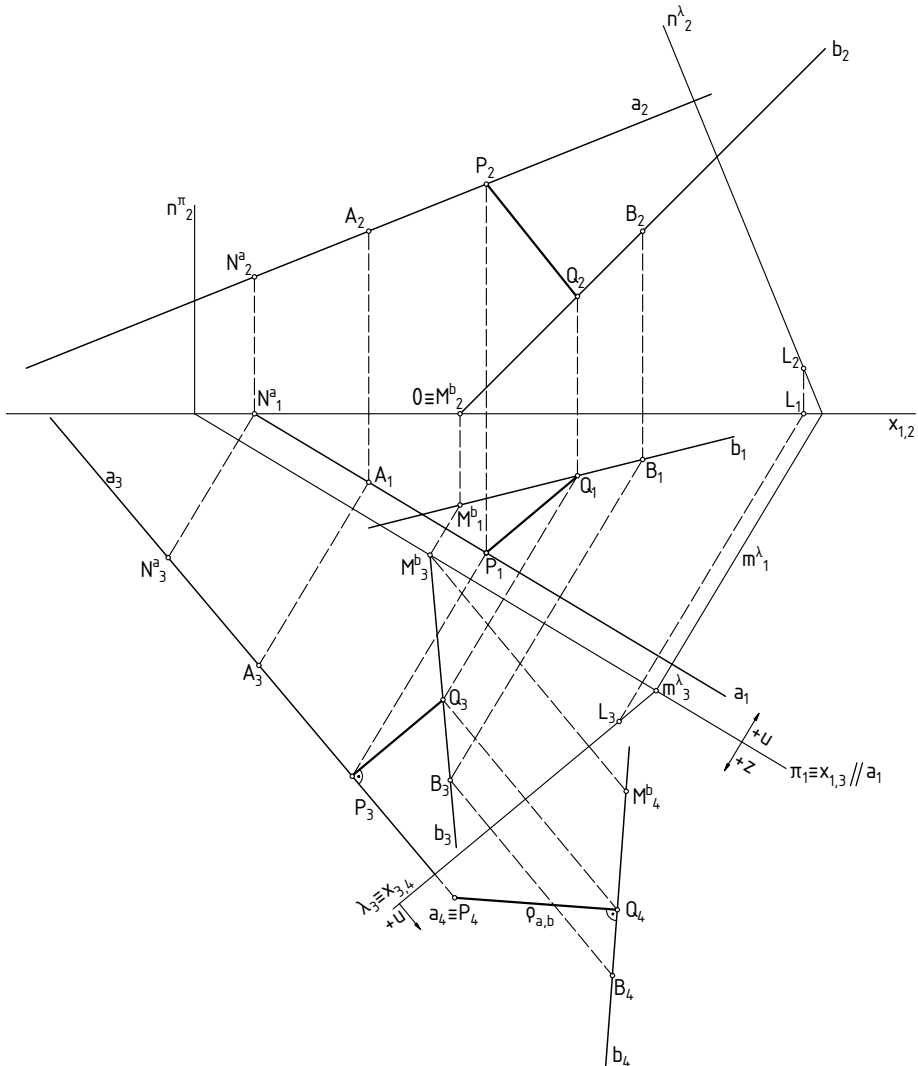


Чертеж 1

Във втория показан пример двете прави са в общо положение спрямо проекци-

онните равнини. Тогава се налагат две смени на проекционния апарат с цел отново една от правите да се проектира в точка. По този начин търсената ос на кръстосаните прави ще се вижда като перпендикуляр от точка към права.

Пример 2. В монжова проекция да се изобрази оста-отсечка PQ на правите $a[A(2; 1.5; 4), N^a(4.5; 0; 3)]$ и $b[B(-4; 1; 4), M^b(0; 2; 0)]$ и да се определи разстоянието между тях.



Чертеж 2

Построенията са показани на чертеж 2 и са извършени в следната последовател-

ност:

1. Изобразени са проекциите на дадените прави a и b .

2. Въведена е трета помощна проекционна равнина π , която е перпендикулярна едновременно на първа проекционна равнина μ и е успоредна на дадената права a . $x_{1,3} \equiv \pi_1$ е построена на произволно място, успоредна на a_1 . С цел добра нагледност е показана и втората дияра на новата проекционна равнина – n_2^α , която е перпендикулярна на оста $x_{1,2}$.

3. Намерени са третите проекции на правите a и $b - a_3$ и b_3 .

4. Въведена е четвърта помощна проекционна равнина λ , която е перпендикулярна на π и правата a . $x_{3,4} \equiv \lambda_3$ е построена на произволно място, перпендикулярна на a_3 . Така в четвърта проекция правата a ще се проектира в точка. Отново с цел добра нагледност са показани първата и втората дияри на равнината $\lambda - m_1^\lambda$ и n_2^λ .

5. Намерени са четвъртите проекции на правите a и $b -$ точката a_4 и правата b_4 .

6. Построена е оста-отсечка на правите в четвърта проекция – отсечката P_4Q_4 . $P_4 \equiv a_4$, $P_4Q_4 \perp b_4$. Тъй като четвърта проекционна равнина е перпендикулярна на правата a , то тя е успоредна на търсената ос-отсечка и тогава правият ъгъл между PQ и правата b се запазва. Също така се запазва и дължината на отсечката PQ , т. е. $|PQ| = |P_4Q_4|$. По дефиниция това е раз/-сто/-я/-ни/-е/-то между двете кръстосани прави a и b .

7. Последователно чрез ординали са намерени трета, първа и втора проекции на точката $Q - Q_3 \in b_3$, $Q_1 \in b_1$ и $Q_2 \in b_2$.

8. За намирането на P_3 е построен перпендикуляр от Q_3 към a_3 . Тъй като правата a е успоредна на трета проекционна равнина π , то правият ъгъл между отсечката PQ и правата a в трета проекция се запазва.

9. Чрез ординали са намерени P_1 и $P_2 - P_1 \in a_1$, $P_2 \in a_2$.

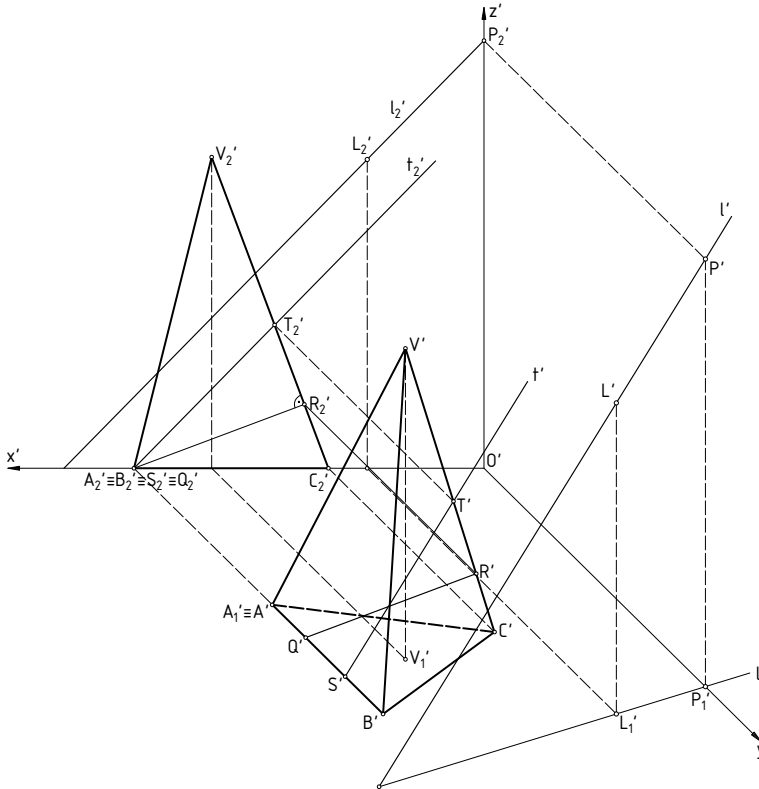
10. Построени са първа и втора проекции на оста-отсечка на правите – отсечките P_1Q_1 и P_2Q_2 .

Следващите три примера са изработени в аксонометрия с цел да се постигне добра нагледност и да се направят приложения на показаните в първите две задачи основни конструкции. Основните конструкции, използвани при работа в аксонометрия могат да бъдат разгледани в [3] и [4]. Задачите са решени в кавалиерна и кабинетна проекция, тъй като това са видове аксонометрии, при които аксонометричната равнина е успоредна на втора координатна равнина ν . Тогава, ако отсечка е успоредна на ν или лежи в нея, то тя се изобразява с истинската си дължина, запазват се ъглите между правите, успоредни на ν и видът на фигурите, успоредни на ν или намиращи се в нея. Така втора координатна равнина може да бъде използвана като трета помощна проекционна равнина в монжова проекция. Телата, показани в трите примера, са избрани така, че един от ръбовете на основата да е перпендикулярен на ν и вторичната му проекция да бъде точка.

Пример 3. В кавалиерна проекция да се изобразят пирамида с връх $V(7; 7; 8)$ и основа триъгълник $ABC[A(9; 5; 0), B(9; 9; 0), C(4; 6; 0)]$ и права $l[L(3; 9; 8), P(0; 8; 11)]$. Да се построят оста-отсечка на основния ръб AB и околния ръб VC и трансверзалата t на AB и VC , която е успоредна на правата l .

Построенията са показани на чертеж 3 и са извършени в следната последователност:

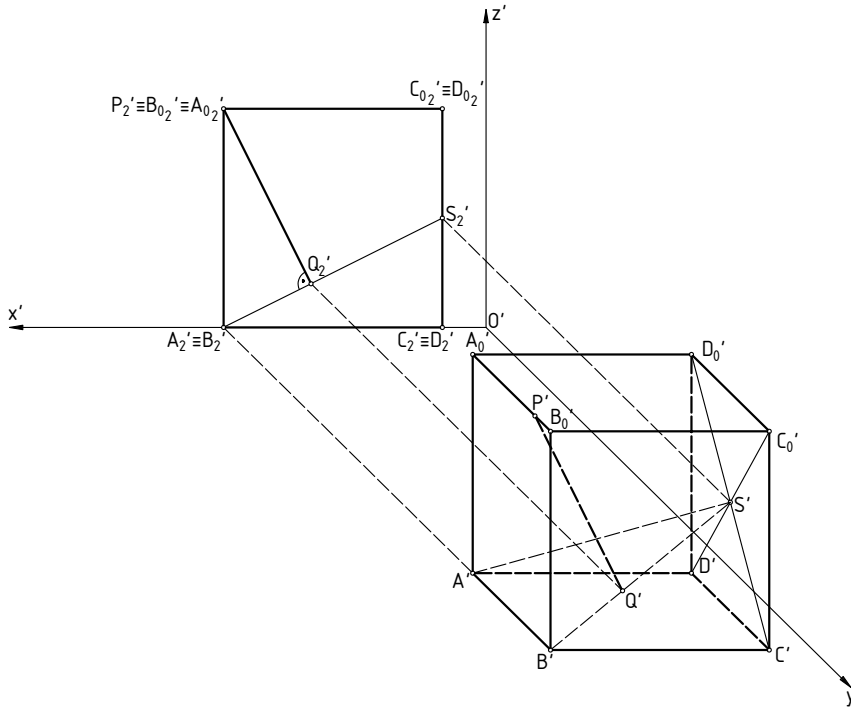
1. Изобразен е аксонометричният кръст на кавалиерна проекция.
2. Изобразена е основата на пирамидата и е нанесен върхът – точка V .
3. Изобразени са околните ръбове на пирамидата, като е определена видимостта им.



Чертеж 3

4. Изобразена е дадената права $l - l'$, l_1' .
5. Намерена е втората вторична проекция на пирамидата – триъгълник $A_2' C_2' V_2'$. Тъй като отсечката AB е перпендикулярна на ν , то $A_2' \equiv B_2'$.
6. Намерена е l_2' – втората вторична проекция на правата l .
7. Построена е t_2' , успоредна на l_2' и минаваща през $A_2' \equiv B_2'$.
8. Отбелязана е пресечната точка на t_2' с $V_2' C_2'$ – точка T_2' и е намерена $T' \in V' C'$.
9. Построена е аксонометричната проекция на търсената трансверзала – правата t' , която минава през T' и е успоредна на l' .
10. През точката $A_2' \equiv B_2'$ е построена отсечка, перпендикулярна на $V_2' C_2' - Q_2' R_2'$. Тази отсечка е вторичната проекция на търсената ос-отсечка на основния и околния ръб, като $|Q_2' R_2'| = |QR|$.
11. Намерени са аксонометричните проекции на точките Q и $R - R' \in V' C'$, $R' Q' \parallel R_2' Q_2'$.

Пример 4. В кабинетна проекция да се изобрази куб $ABCD A_0 B_0 C_0 D_0$ с една стена в първа координатна равнина μ с ръб $AB[A(6; 16; 0), B(6; 21; 0)]$. Да се намери центъра на стената $CDC_0 D_0$ – точката S и да се определи раз-/сто/-я/-ни/-е/-то между правите $A_0 B_0$ и BS .

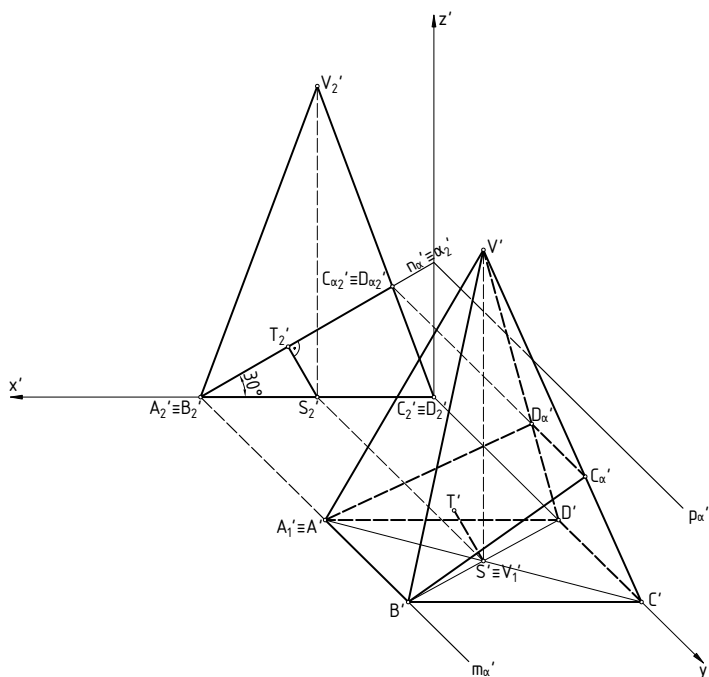


Чертеж 4

При изработването на този чертеж построенията са направени в същата последователност като в предния пример при намирането на оста-отсечка на правите и са показани на чертеж 4. Дължината на отсечката PQ е търсеното разстояние. $|PQ| = |P'Q'|$.

В последния пример е показано решение на задачата за намиране на разстояние от точка до равнина – една от основните метрични задачи – и за построяване на сечение на тяло с равнина. Секущата равнина е поставена перпендикулярна на втора координатна равнина и по този начин тя се изобразява в права. Това улеснява намирането на върховете на сечението.

Пример 5. В кабинетна проекция да се изобрази правилна четириъгълна пирамида с височина $h = 8$ и основа в първа координатна равнина μ със страна $AB[A(6; 9; 0), B(6; 15; 0)]$. Да се изобрази сечението на пирамидата с равнина α , минаваща през ръба AB и сключваща ъгъл 30° с равнината на основата. Да се определи разстоянието от точката S – център на основата на пирамидата до равнината α .



Чертеж 5

Построенията са показани на чертеж 5 и са извършени в следната последователност:

1. Изобразена е пирамидата, като $|A'B'| = |C'D'| = 3$, $|B'C'| = |A'D'| = 6$, $|V_1'V'| = h = 8$.

2. Намерена е втора вторична проекция на пирамидата – равностранен триъгълник $A_2'C_2'V_2'$.

3. Построена е втората дъря на секущата равнина – $n'_\alpha \equiv \alpha'_2$, която минава през A_2' и сключва ъгъл 30° с x' . Ъгълът $\sphericalangle(x', n'_\alpha)$ е линеен ъгъл на двустенния ъгъл $\sphericalangle(\alpha, \mu)$. Тъй като равнината α минава през отсечката AB , която е перпендикулярна на ν , то равнината α също е перпендикулярна на ν . Тогава вторите вторични проекции на всички точки от равнината α са върху нейната втора дъря – $n'_\alpha \equiv \alpha'_2$.

4. Отбелязани са пресечните точки на n'_α с $V_2'A_2' - C'_\alpha2 \equiv D'_\alpha2$.

5. Намерени са върховете на сечението C'_α и D'_α . Сечението е трапецът $A'B'C'_\alpha D'_\alpha$.

6. През точка S' е построен перпендикуляр към n'_α . Петата на перпендикуляра е означена с T'_2 . Дължината на отсечката $S'_2T'_2$ е разстоянието от точката S до равнината α . Правият ъгъл се запазва, тъй като едното му рамо – втората дъря на равнината α – лежи в равнина, успоредна на проекционната равнина.

7. Построена е отсечка $S'T'$, успоредна и равна на $S'_2T'_2$. Това е аксонометричната проекция на перпендикуляра от центъра на основата на пирамидата към равнината

на сечението.

Решени и подробно описани задачи за построяване на равнинно сечение на пирамида и призма могат да бъдат разгледани в [2] и [5].

Чертежите са изработени с помощта на AUTOCAD.

Благодарности. Авторите биха искали да благодарят на НИС на ТУ - София за финансовата подкрепа.

Литература

- [1] РАДУЛОВ, В., ПЪРВАНОВА, И., *Ръководство по дескриптивна геометрия, Монжова проекция*, (2005) УАСГ, ISBN 954-724-027-7
RADULOV, V., PARVANOV, I., 2006. *Descriptive geometry, Plane sections, Textbook*, UACG, (in Bulgarian)
- [2] РАДУЛОВ, В., ПЪРВАНОВА, И., 2012. *Ръководство по дескриптивна геометрия, Равнинни сечения*, (2012) Регалия 6, ISBN 978-954-745-220-6
RADULOV, V., PARVANOV, I., 2012. *Descriptive geometry, Plane sections, Textbook*, Regalia 6, (in Bulgarian)
- [3] ЧОРБАДЖИЕВ, Д., *Дескриптивна геометрия*, УАСГ, (1992).
CHORBADGIEV, D., 1992. *Descriptive geometry*, UACG (in Bulgarian)
- [4] ДАНАИЛОВА, Н., ВЕЛИНОВА, Л., КОЛЕВ, М., *Аксонметрия, Курсови и изпитни задачи*, УАСГ, ISBN 978-954-724-035-4 (2012).
DANAİLOVA, N., VELİNOVA, L., KOLEV, M., 2012. *Axonometry, Textbook*, UACG (in Bulgarian)
- [5] ЗАРЕВА, Ц., 2013. *Учебно помагало по дескриптивна геометрия, Равнинни сечения, сенки, отвори*, (2013) УАСГ, ISBN 978-954-724-064-3
ZAREVA, C., 2013. *Descriptive geometry, Plane sections, shadows, perforations, Textbook*, UACG, (in Bulgarian)