Национален колоквиум по математика

ИМИ-БАН, 28 Октомври 2015 г.

Суперсиметрични струни, геометрии, решения

Стефан Иванов

The author is partially supported by
Contract DFNI I02/4/2015 and Contract 148/2015
with the University of Sofia "St. Klment Ohridski"

1. Физическа мотивация

Геометрията на бозонната част в хетеротичните суперг-равитации е от тип $\mathbb{R}^{1,9-p} \times M_p$, като:

- Римановата метрика g;

- дилатонната функция ϕ;

- 3 - формата на силово поле H;

- калибровъчното поле (свързаност в асоциирано векторно разслоение) A със силово поле (кривина) F^A са нетривиални само върху M_p ,

определят 'геометрията' на M_p.

- **Основен въпрос.**

Търсят се решения *запазващи поне една суперсиметрия* на уравненията на движение на обобщеното на действието на Айнщайн-Хилберт

$$S = \int e^{-2\phi}\Big[S^g + 4(\nabla^g\phi)^2 - \frac{1}{2}|H|^2 - \frac{\alpha'}{4}\Big(Tr|F^A|^2) - Tr|R|^2\Big)\Big]$$

- S^g-скаларната кривина на g,

- R-кривината на подходяща свързаност върху допирателното разслоение,

- α'-константа.

- **Уравненията на движение** съответни на действието S (обощение на уравненията на Айнщайн-Хилберт):

$$\begin{aligned} & \rho^g_{ij} - \frac{1}{4} H_{imn} H_j^{mn} + 2\nabla^g_i \nabla^g_j \phi \\ & - \frac{\alpha'}{4} \Big[(F^A)_{imns} (F^A)_j^{mns} - R_{imns} R_j^{mns} \Big] = 0; \\ & \nabla^g_i (e^{-2\phi} H^i_{jk}) = 0; \quad \nabla^+_i (e^{-2\phi} (F^A)^i_j) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

където ρ^g е тензорът на Ричи за метриката g.

• Запазване на суперсиметрия

Хетеротичната геометрия запазва суперсиметрия точно когато съществува поне един спинор ϵ, такъв че суперсиметричните вариации на фермионните полета са нули т.е. изпълнени са уравненията

$$\begin{aligned} \delta_\lambda = \nabla\epsilon = \left(\nabla^g + \frac{1}{2}H\right)\cdot\epsilon = 0, \\ \delta_\Psi = \left(d\phi - \frac{1}{2}H\right)\cdot\epsilon = 0, \\ \delta_\xi = F^A\cdot\epsilon = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

- λ е гравитино полето;

- Ψ е дилатино полето;

- ξ е гайгино полето;

- $\cdot$ е Клифордовото действие на форми върху спинори.

• Спинори - коренуване на Лапласиана

P.Dirac '28 адаптира формулата за енергията на свободна частица,

$$E = \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4}$$

в квантовата механика, където енергията E и импулса p се заменят с диференциални опреатори действащи върху вероятностната функция $\psi(t,x) \in R \times R^3$,

$$E \to \sqrt{-1}h\frac{\partial}{\partial t}, \quad p \to \sqrt{-1}hgrad, \quad p^2 = -h^2\triangle.$$

Формулата за енергията води Dirac до търсене на оператор от първи ред с квадрат равен на Лапласиана, D, $D^2 = \triangle = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. От $D = \sum_{i=1}^n \gamma_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ следва

$$\gamma_i^2 = -id, \quad \gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = 0, i \neq j. \tag{3}$$

- $n = 3$: групата SU(2) и единичните кватерниони:

$\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{H} : (z_1, z_2) \cong z_1 + jz_2,$

представянето $i, j, k, : \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{H} \to \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{H}$ ни задава

$$\gamma_{1_{(i)}} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \gamma_{2_{(j)}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_{3_{(k)}} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Това са генераторите на алгебрата на Ли на групата SU(2), известни още като *матрици на Pauli.*

Мултипликативната алгебра $\mathbb{C}_n$ генерирана от елементи удовлетворяващи (**??**) се нарича алгебра на Клифорд за негативно дефинитна метрика $(\mathbb{R}^n, -x_1^2 - \cdots, -x_n^2)$.

Минималното комплексно представяне (за четно n=2m) се реализира с матриците на Паули.

$$\kappa{:}\mathbb{C}_{2m} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \ldots. \otimes \mathbb{C}^2}_{m-times}$$

Елементите на в-ното п-ство $\kappa(\mathbb{C}_{2m})$ са спинорите.

• Умножение на спинори с вектори в Евклидово п-ство:

Ако $X = \sum a^l \gamma_l \in \mathbb{R}^n$ то Клифордовото умножение със спинор ψ се дефинира като:

$$X \cdot \psi = \kappa(X) \cdot \psi, \quad \kappa(X) = \sum a^l \kappa(\gamma_l).$$

$$X \cdot \psi = \sum a^l \kappa(\gamma_l)(\psi), \quad X \cdot (X \cdot \psi) = -||X||^2 \psi$$

• Умножение на спинори с форми в Евклидово п-ство:

Ако $\alpha = \sum a_{lm} \gamma^l \wedge \gamma^m$ е 2-форма, то

$$\alpha \cdot \psi = \kappa(\alpha) \cdot \psi, \quad \kappa(\alpha) = \sum a_{lm} \kappa(\gamma_l) \cdot \kappa(\gamma_m)$$

$$X \cdot \alpha = X \wedge \alpha - X \lrcorner \alpha.$$

• **Инстантон**

Инстантонното уравнение, последното уравнение в (??) означава, че 2-формата на кривина F^A се съдържа в алгебрата на Ли на група на Ли, която запазва нетривиалния спинор ϵ. Известно е, че в размерности 5,6,7 и 8 това са съответно групите $SU(2), SU(3), G_2$ и $Spin(7)$. Инстантон (решение на последното уравнение в (??)) в размерностите 5,6,7 и 8 е свързаност чиято 2-форма на кривина се съдържа съответно в алгебрата на Ли $su(2)$, $su(3)$, g_2 или $spin(7)$.

• В размерност 4, инстантонното условие е познато като условие за (анти) авто-дуалност, именно 2-формата на кривина се съдържа в алгебрата на Ли $su(2)$.

• Фундаментален факт

Броя на суперсиметриите, които се запазват в суперсиметричните струнни теории, зависи по същество от броя на паралелните спинори спрямо метрична свързаност което редуцира **групата на холономия** на тази свързаност до група запазваща нетривиален спинор - води до групите $SU(2), p = 5; SU(3), p = 6;$

$G_2, p = 7; Sp(2), Spin(7), p = 8.$

• Група на холономия

Паралелният пренос по затворена крива индуцира линейно изображение в допирателното пространство - група на холономия.

Определя се само от кривината и ковариантните ѝ производни (Cartan).

- **Гравитино и дилатино уравнения:**

$$\nabla\epsilon = (\nabla^g + \frac{1}{2}H)\epsilon = 0; \qquad (d\phi - \frac{1}{2}H)\cdot\epsilon = 0.$$

- Първото уравнение дефинира редукция на групата на холономия на метрична свързаност с напълно антисиметрична торзия H до група запазваща нетривиален спинор, $SU(3), G_2, Spin(7)$.

- Второто уравнение води до допълнителни ограничения върху геометрията структурата.

• **Анулиране на аномалията** Уравненията се допълват от така нареченото условие на Греен-Шварц за анулиране на аномалията;

$$dH = \frac{\alpha'}{4}\Big(Tr(R \wedge R) - Tr(F^A \wedge F^A)\Big). \tag{4}$$

• **Уравненията на движение** съответни на действието S (обощение на уравненията на Айнщайн-Хилберт):

$$\begin{aligned} \rho^g_{ij} - \frac{1}{4}H_{imn}H_j^{mn} + 2\nabla^g_i\nabla^g_j\phi \\ -\frac{\alpha'}{4}\Big[(F^A)_{imns}(F^A)_j^{mns} - R_{imns}R_j^{mns}\Big] = 0; \\ \nabla^g_i(e^{-2\phi}H^i_{jk}) = 0; \quad \nabla^+_i(e^{-2\phi}(F^A)^i_j) = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

където ρ^g е тензорът на Ричи за метриката g.

1. Айнщайнова гравитация.

При нулеви полета, $H = d\phi = F^A = 0$, действието S е действието на Айнщайн-Хилберт,

$$S = \int S^g,$$

уравненията на движение (??) се редуцират до уравненията на Айнщаин-Хилберт,

$$\rho^g = 0,$$

а уравненията за запаване на суперсиметрията (??) добиват вида

$$\nabla^g \epsilon = 0;$$

• **Основен факт:** В този случай уравненията на движение са оказват следствие от уравненията за запазване на суперсиметрията тъй като съществуването на паралелен спинор редуцира групата на холономия до една от групите $SU(n), Sp(n), G_2, Spin(7)$, което води до анулиране на тензорът на Ричи.

• Компактните многообразия, решения на уравненията за запазване на суперсиметрията са известните многообразия на Калаби-Яу (за четна размерност), хипер-Келеровите многообразия (за разменост деляща се na 4 и пространствата на Джойс за размерности 7 и 8.

• Уравненията на Айнщайн

$$\rho^g = 0$$

са силно нелинейни и намирането на компактни решения е изключително трудно.

• Уравненията за запазване на суперсиметрията с тривиален инстантон,

$$\nabla^g \epsilon = 0,$$

в четните размерности, редуцират проблема до компактно комплексно Келерово многообразие с холоморфно тривиален първи клас на Черн, т.е. съществува ненулева холоморфна форма на обема, която, допълнително е и паралелна относно свързаността на Леви-Чивита.

Първото условие е кохомологично и има известни доста примери на такива компактни келерови многообразия.

Второто условие за паралелност, се оказва следствие от това кохомологично условие благодарение на фундаменталната теорема на С.Т.Яу разрешила хипотезата на Калаби. От гледна точка на струнната теория теоремата на Яу може да се изкаже по следния начин:

Теорема Яу: Всяко компактно комплексно многообразие с холоморфно тривиален първи клас на Черн допускащо Келерова метрика допуска суперсиметрично решение на уравненията на Айнщайн.

◇ **Нетривиален инстантон.** При нетривиален инстантон $F^A \neq 0$, в четните размерности, задачата води до определяне на холоморфно векторно разслоение върху компактно Келерово многообразие и съществуване на инстантонна свързаност върху него. Тази задача довежда до Айнщайн-Ермитови векторни разслоения и стабилни векторни разлоения:

• Съответствието на Хитчин-Кобаяши установява еквивалентност между тези понятия-теорема на Доналдсон-Уленбек-Яу.

• Изследвайки пространството от модули на инстантоните в размерност 4 Доналдсон достига до знаменития си резултат за съществуване на не-дифеоморфни гладки структури в размерност 4.

2. Нетривиални силови полета

◊ **Система на Стромингер.** При нетривиални силови полета решенията на системата уравнения за запазване на суперсиметрията (??) заедно с уравнението за анулиране на аномалията (??), предложена от A. Strominger, 1986, е известна още като система на Стромингер.

•Решенията на системата на Стромингер решения ли са на уравненията на движение на хетеротичната струна?

• Съществуват ли компактни решения на системата на Стромингер?

• **Основен проблем:** При нетривиални силови полета решенията на системата на Стромингер не винаги са решения на уравнениеята за движение на хетеротичната струна.

Теорема (Иванов, Phys. Lett. B,'10). *Решенията на системата на Стромингер за хетеротичната струна са решения на хетеротичните уравнения на движение* (??) *в размерности 5,6,7,8 тогава и само тогава, когато свързаността върху тангенциалното разслоение в* (??) *е* $SU(2), SU(3), G_2$ *или* $Spin(7)$ *инстантон.*

Теоремата е разширена за всички размерности от D.Martelli,J. Sparks, Adv. Theor. Math. Phys.'11 предоказана и от X. de la Ossa, E. Svanes, JHEP'14

Този резултат фиксира неопределената свързаност върху допирателното разслоение в размерност 6 в следния смисъл:

Не-Келеровата версия на теоремата на Donaldson - Uhlenbeck-Yau, доказана от Li-Yau, твърди използвайки съответствието на Хитчин-Кобяши, че съществува единствен $SU(3)$-инстантон (Yang-Mills свързаност) върху ермитово векторно разслоение точно тогава, когато това разслоение е стабилно със степен нула.

Следователно, за да се построят компактни суперсиметрични решения на хетеротичните уравнения на движение е добре да се стартира от ермитово 6-мерно многообразие със стабилно допирателно разслоение от степен нула - КЛАСИФИКАЦИЯ НА ТАКИВА?

• Физически естествена свързаност върху допирателното разслоение

При наличие на 3-формата H имаме 2 естествени свързаности запазващи метриката:

$\nabla^+ = \nabla^g + \frac{1}{2}H, \quad \nabla^- = \nabla^g - \frac{1}{2}H.$

Физически естествена свързаност върху допирателното разслоение в уравненията (??), (??) (—)-свързаността, ∇^-, Bergshoeff, de Roo' 89, Hull' 86.

- Една причина: кривината й, R^- е инстантон до първи ред спрямо α'.

- Това е следствие от първото уравнение в (??), (??) и равенството:

$$R^+(X,Y,Z,U) - R^-(Z,U,X,Y) = \frac{1}{2}dH(X,Y,Z,U). \quad (6)$$

Наистина, анулирането на аномалията (??) заедно с уравнението (??) дават, че

$$R^+(X,Y,Z,U) - R^-(Z,U,X,Y) = O(\alpha').$$

Първото уравнение в (??) означава, че групата на холономия на ∇^+ е подгрупа на $SU(2), SU(3), G_2, Spin(7)$, т.е. $R^+(X,Y) \subset \mathfrak{g}_2$. Следователно R^- е удовлетворява инстантонното условие до първи ред спрямо α'.

• **Първите компктни решения** с нетривиално силово поле H, нетривиален инстантон и дилатон са построени в размерност 6 от

J.Li, S.T.-Yau, J.Diff.Geom'05,
J.Fu, S.T.-Yau, J.Diff.Geom.'08.

Това са 2-торични разслоения върху 4 - мерни K3 - повърхнини (модел на Goldstein,Prokushkin, Comm. Math. Phis'04), като за свързаност върху допирателното разслоение е взета свързаността на Черн.

Проблема се редуцира до удовлетворяване на уравнението на аномалията, (**??**), което се свежда до уравнения на Монж-Ампер и се доказва съществуване на решение по метода на непрекъснатостта - имитира доказателството на С.Т.-Яу на хипотезата на Калаби - неявни решения.

• **Тези решения на системата на Стромигер не са решения на хетеротичните уравненията на двиижение:**

Свързаността на Черн не е инстанон и прилагане на теоремата на Иванов, Martelli, Sparks, Adv.Theor. Math.Phys'11 .

• **Първите експлицитни компактни решения на системата на Стромигер с константен дилатон**, нетривиален инстантон и силово поле H са построени в размерност 5,6,7,8 от

M.Fernandez, S.Ivanov, L.Ugarte,R.Villacampa:

Comm. Math. Phys'09,

Nucl. Phys B'09,

Adv. Teor. Math. Phys'11

Това са компактни нил-многообразия, т.е. компактни нилпотентни групи на Ли факторизирани по ко-компактни решетки, като свързаността върху допирателното разслоение се взема да бъде инстантон - експлицитни решения на хетеротичните уравненията на дви-ижение.

• **D=6:** $SU(3)$: групата запазваща едновременно

1. Келерова форма $F = e^1 \wedge e^2 + e^3 + e^4 + e^5 + e^6$;

2. Комплексна форма на обема

$$\Psi = (e^1 + ie^2) \wedge (e^3 + ie^4) \wedge (e^5 + ie^6) = \Psi^+ + \sqrt{-1}\Psi^-.$$

• **D=7:** G_2: групата запазваща фундаменталната 3-форма (умножение в имагинерни октониони)

$$\Theta = F \wedge e^7 + \Psi^+$$

• **D=8:** $Spin(7)$: групата запазваща фундаменталната 4-форма

$$\omega = \Theta \wedge e^8 + *_7\omega$$

- **SU(3)-Геометрия:** A. STROMINGER, NUCL. PHYS.'86:

  - **гравитино:** Почти Ермитово многобразие допускащо свързаност с напълно анти-симетрична торзия запазваща почти ермитовата структура с холономия съдържаща се в SU(3), т.е. запазваща комплексната форма на обема.

  - **дилатино:** почти комплексната структура е интегрируема, т.е. Ермитово многообразие (M, g, J) с точна форма на Ли.

- Ермитово многообразие допускащо Ермитова свързаност с напълна антисиметрична торзия - единствена, определена от

$$T = H = -dF(J., J., J.)$$

с холономия съдържаща се в $SU(3)$,

$\nabla\Psi = 0 \Rightarrow e^{\pm 2\phi}\Psi$-*холоморфна топ форма.*

Аналитично условие:

$$2F \lrcorner dF + \Psi^+ \lrcorner d\Psi^+ = 0.$$

- конформно балансирано, т.е. с точна форма на Ли,

$$\theta = 2d\phi$$

Константен дилатон:

$$dF \wedge F = d\Psi^+ = d\Psi^- = 0.$$

• **G_2-Геометрия:**

Th. Friedrich, S. Ivanov, Asian J. Math.'02., Gauntlett at al, JHEP'01, Comm.Math.Phys.'04

• **Гравитино:** G_2-многообразие допуска G_2-свързаност, $\nabla\Theta = 0$ с антисиметрична торзия точно когато

$$d * \Theta = \theta^7 \wedge *\Theta,$$

$$\theta^7 = -\tfrac{1}{3} * (\delta\Theta \wedge *\Theta) \text{ - форма на Лии.}$$

Свързаността ∇ е единствена, определена от

$$H = T = \frac{1}{6}(d\Theta, *\Theta)\,\Theta - *d\Theta + *(\theta^7 \wedge \Theta).$$

• **Дилатино:** $\quad d\Theta \wedge \Theta = 0, \quad \theta^7 = 2d\phi.$

$$H = T = - * d\Theta + *(2d\phi \wedge \Theta).$$

• **Геометричен модел, Fernandez-Iv-Ugarte-Villacampa, Adv.Teor.Math.Phys. 2011**

Това са $\mathbb{T}^3$-разслоения върху м-зия на Калаби-Яу

- Нека Γ_i, $1 \le i \le 3$, са трите затворени ANTI-SELF-DUAL 2-форми върху повърхнина на Калаби-Яу M^4

- Нека ω_1 и $\omega_2 + \sqrt{-1}\omega_3$ са (затворената) Келерова форма и холоморфната форма на обема върху M^4.

- Има компакно м-зие което е тотално пространство на $\mathbb{T}^3$-разслоение върху M^4 с G_2-структура

$$\Theta = \omega_1 \wedge \eta_1 + \omega_2 \wedge \eta_2 - \omega_3 \wedge \eta_3 + \eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \eta_3,$$

което е решение на първите две спинорни Килингови уравнения в (??) с ПОСТОЯНЕН ДИЛАТОН в размерност 7, като η_i, $1 \le i \le 3$ са 1-форми, такива че $d\eta_i = \Gamma_i$,

$1 \leq i \leq 3$.

- За гладка функция f върху M^4, G_2-структурата

$$\Theta_f = e^{2f}\Big[\omega_1 \wedge \eta_1 + \omega_2 \wedge \eta_2 - \omega_3 \wedge \eta_3\Big] + \eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \eta_3$$

РЕШАВА първите две спинорни Килингови уравнения в (??) с НЕПОСТОЯНЕН ДИЛАТОН $\phi = -2f$.

- Метриката е $\quad g_f = e^{2f} g_{cy} + \eta_1 \otimes \eta_1 + \eta_2 \otimes \eta_2 + \eta_3 \otimes \eta_3$.

- Този модел гарантира решаване на първите две спинорни Килингови уравнения. За конструиране на решение на системата на Строминген ние трябва да намерим допълнително векторно разслоение, да конструираме инстантон и да определим свързаност върху допирателното разслоение и да решим условието за анулиране на аномалията. (??).

Кватернионна група на Хайзенберг - Кватернионната група на Хайзенберг $G(\mathbb{H})$ е просто свързаната група ма Ли с алгебра на Ли $\mathfrak{g}(\mathbb{H})$ сададена със структурните уравнения

$$de^1 = de^2 = de^3 = de^4 = 0, \quad d\gamma^5 = \sigma_1 = e^{12} - e^{34},$$
$$d\gamma^6 = \sigma_2 = e^{13} + e^{24}, \quad d\gamma^7 = \sigma_3 = e^{14} - e^{23}.$$

- Забележка: $\sigma_1 = e^{12} - e^{34}$, $\sigma_2 = e^{13} + e^{24}$, $\sigma_3 = e^{14} - e^{23}$ са трите anti-self-dual 2-форми в $\mathbb{R}^4$.

- За да получим резултати в размерности по-малки от 7 чрез контакции на $\mathfrak{g}(\mathbb{H})$ разглеждаме орбитата на $G(\mathbb{H})$ под действие на $GL(3, \mathbb{R})$ върху $span\,\{\gamma^5, \gamma^6, \gamma^7\}$.

- Групата K_A се определя от алгебрата на Лии $\mathfrak{K}_A$ със структурни уравнения:

$$de^1 = de^2 = de^3 = de^4 = 0, \qquad de^{4+i} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\,\sigma_j,$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Алгебрата на Лии $\mathfrak{K}_A$ е изоморфна на $\mathfrak{g}(\mathbb{H})$ и съответно групата K_A е изоморфна на $G(\mathbb{H})$.

$\boxed{G_2 \text{ структура върху } G(\mathbb{H})\text{-постоянен дилатон}}$

Дефинираме G_2-структура върху K_A чрез 3-формата

$$\Theta = \omega_1 \wedge e^7 + \omega_2 \wedge e^5 - \omega_3 \wedge e^6 + e^{567},$$

$$\omega_1 = e^{12} + e^{34}, \quad \omega_2 = e^{13} - e^{24}, \quad \omega_3 = e^{14} + e^{23}$$

са трите затворени авто-дуални форми върху $\mathbb{R}^4$.

- Дуалната 4-форма $*\Theta$ се задава с

$$*\Theta = \omega_1 \wedge e^{56} + \omega_2 \wedge e^{67} + \omega_3 \wedge e^{57} + \frac{1}{2}\omega_1 \wedge \omega_1.$$

- Свойствата $\sigma_i \wedge \omega_j = 0$ for $1 \leq i, j \leq 3$ ни дават

$$d * \Theta = 0, \quad d\Theta \wedge \Theta = 0,$$

- решение на гравитино и дилатино уравненията с постоянен дилатон.

$\boxed{G_2 \text{ структура върху } G(\mathbb{H})\text{-непостоянен дилатон}}$

- f - гладка функция върху $\mathbb{R}^4$; G_2 форма $\overline{\Theta}$

$$\overline{\Theta} = e^{2f}\left[\omega_1 \wedge e^7 + \omega_2 \wedge e^5 - \omega_3 \wedge e^6\right] + e^{567}.$$

- Дуалната 4-форма $\overline{*}\overline{\Theta}$ е:

$$\overline{*}\overline{\Theta} = e^{2f}\left[\omega_1 \wedge e^{56} + \omega_2 \wedge e^{67} + \omega_3 \wedge e^{57} + \frac{e^{2f}}{2}\omega_1 \wedge \omega_1\right].$$

Пресмятаме

$$d\overline{*}\overline{\Theta} = 2df \wedge \overline{*}\overline{\Theta}, \quad d\overline{\Theta} \wedge \overline{\Theta} = 0.$$

Формата на Лии $\overline{\theta}$:

$$\overline{\theta} = 2df$$

- решение на гравитино и дилатино уравненията с непостоянен дилатон $\phi = -2f$

$\boxed{\text{Торзията } H}$ Торзията на ∇^+ (силата H) се задава с формулата

$$T = -*d\Theta + *(\theta \wedge \Theta).$$

- Пресмятаме

$$d\overline{\Theta} = 2df \wedge \overline{\Theta} - 2df \wedge e^{567} + de^{567}.$$

- Оттук, за торзията $\overline{T}$ имаме:

$$\overline{T} = \overline{*}(2df \wedge e^{567} - de^{567}) =$$

$$= e^{-f}\Big[-2f_1\,\overline{e}^{234} + 2f_2\,\overline{e}^{134} - 2f_3\,\overline{e}^{124} + 2f_4\,\overline{e}^{123}\Big]$$

$$+e^{-2f}\Big[(a_{11}\,\overline{\sigma_1}+a_{12}\,\overline{\sigma_2}+a_{13}\,\overline{\sigma_3})\wedge\overline{e}^5+(a_{21}\,\overline{\sigma_1}+a_{22}\,\overline{\sigma_2}+a_{23}\,\overline{\sigma_3})\wedge\overline{e}^6\Big]$$

$$+ e^{-2f}\Big[(a_{31}\,\overline{\sigma_1} + a_{32}\,\overline{\sigma_2} + a_{33}\,\overline{\sigma_3}) \wedge \overline{e}^7\Big],$$

- $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $1 \le i \le 4$, and $f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, $1 \le i, j \le 4$.

- Пресмятаме

$$d\overline{T} = -e^{-4f}\left[\triangle e^{2f} + 2|A|^2\right]\overline{e}^{1234} = -\left[\triangle e^{2f} + 2|A|^2\right]e^{1234},$$

$\triangle e^{2f} = (e^{2f})_{11} + (e^{2f})_{22} + (e^{2f})_{33} + (e^{2f})_{44}$ - стандартният лапласиан върху $\mathbb{R}^4$.

Първата форма на Понтрягин за (-)-свързаността

Напмняме някои дефиниции и означения:

1-формите на свързаност ω_{ji} на метрична свързаност $\nabla, \nabla g = 0$ спрямо локален ортонормиран базиз$\{E_1, \dots, E_d\}$:

$$\omega_{ji}(E_k) = g(\nabla_{E_k} E_j, E_i), \quad \nabla_X E_j = \omega_j^s(X)\, E_s$$

- 2-формите на кривинаΩ_j^i of ∇:

$$\Omega_j^i = d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k, \quad \Omega_{ji} = d\omega_{ji} + \omega_{ki} \wedge \omega_{jk}$$

$$R^l_{ijk} = \Omega^l_k(E_i, E_j), \quad R_{ijkl} = R^s_{ijk} g_{ls}$$

Първата форма на Понтрягин:

$$8\pi^2 p_1(\nabla) = \sum_{1\le i<j\le d} \Omega^i_j \wedge \Omega^i_j$$

- В НАШИЯТ СЛУЧАЙ:

Формулата на Koszul за 1 -формите на свързаност за свързаността на Леви-Чивита: $(\omega^{\overline{g}})^{\overline{i}}_{\overline{j}}$ of the metric $\overline{g}$:

$$(\omega^{\overline{g}})^{\overline{i}}_{\overline{j}}(\overline{e}_k) = \tfrac{1}{2}\Big(d\overline{e}^i(\overline{e}_j, \overline{e}_k) - d\overline{e}^k(\overline{e}_i, \overline{e}_j) + d\overline{e}^j(\overline{e}_k, \overline{e}_i)\Big)$$
$$\overline{g}(\overline{e}_i, [\overline{e}_j, \overline{e}_k]) = -d\overline{e}^i(\overline{e}_j, \overline{e}_k)$$

- За 1-формите $(\omega^-)^{\overline{i}}_{\overline{j}}$ на свързаността ∇^-,

$$(\omega^-)^{\overline{i}}_{\overline{j}} = (\omega^{\overline{g}})^{\overline{i}}_{\overline{j}} - \frac{1}{2}(\overline{T})^{\overline{i}}_{\overline{j}}, \qquad (\overline{T})^{\overline{i}}_{\overline{j}}(\overline{e}_k) = \overline{T}(\overline{e}_i, \overline{e}_j, \overline{e}_k).$$

$\boxed{\text{Първата форма на Понтрягин за } \nabla^-}$

- Пресмятаме 2-формите на кривина $(\Omega^-)^{\bar i}_{\bar j}$ и след това следата:

$$\sum_{1\le\bar i<\bar j\le 7}(\Omega^-)^{\bar i}_{\bar j}\wedge(\Omega^-)^{\bar i}_{\bar j} = \Big(6|A|^2e^{-2f}(f_{11}+f_{22}+f_{33}+f_{44}-2f_1^2-2f_2^2-2f_3^2-2f_4^2)$$

$$+24\,f_1^2f_{11}-8\,f_{12}^2-8\,f_{13}^2-8\,f_{14}^2+32\,f_1f_{12}f_2+8\,f_{11}f_2^2+8\,f_1^2f_{22}+8\,f_{11}f_{22}+24\,f_2^2f_{22}-8\,f_{23}^2-8\,f_{24}^2+32\,f_1f_{13}f_3+32\,f_2f_{23}f_3+8\,f_{11}f_3^2+8\,f_{22}f_3^2+8\,f_1^2f_{33}+8\,f_{11}f_{33}+8\,f_2^2f_{33}+8\,f_{22}f_{33}+24\,f_3^2f_{33}-8\,f_{34}^2+32\,f_1f_{14}f_4+32\,f_2f_{24}f_4+32\,f_3f_{34}f_4+8\,f_{11}f_4^2+8\,f_{22}f_4^2+8\,f_{33}f_4^2+8\,f_1^2f_{44}+8\,f_{11}f_{44}+8\,f_2^2f_{44}+8\,f_{22}f_{44}+8\,f_3^2f_{44}+8\,f_{33}f_{44}+24\,f_4^2f_{44}\Big)\,e^{1234}.$$

Първата форма на Понтрягин за свързаността ∇^- е пропорционална на e^{1234}, задава се с:

$$\pi^2 p_1(\nabla^-) = \left[\mathcal{F}_2[f] + \triangle_4 f - \frac{3}{8}|A|^2 \triangle e^{-2f}\right] e^{1234},$$

- $\mathcal{F}_2[f]$ е 2-Хесиан на f, т.е. сумата на всички главни 2×2-минори на Хесиана,

- $\triangle_4 f = div(|\nabla f|^2 \nabla f)$ е 4-Лапласиан на f.

Въпреки, че 2-формите на кривина на ∇^- са квадратични спрямо градиента на дилатона, първата форма на Понтрягин за ∇^- е също квадратична по тези членове. Изобщо, от 4-ти ред !

- Ако f зависи от 2 променливи то $\mathcal{F}_2[f] = det(Hess f)$;

- Ако f е функциа на една променлива то $\mathcal{F}_2[f] = 0$.

$\boxed{G_2\text{-инстантон}}$

Proposition 2.1. *Нека* D_Λ, $\Lambda = (\lambda_{ij}) \in \mathfrak{gl}_3(\mathbb{R})$, *е линейна свързаност върху групата на Ли* K_A *зададена със следните 1-форми*

$$\omega_{\bar 2}^{\bar 1} = -\omega_{\bar 1}^{\bar 2} = -\omega_{\bar 4}^{\bar 3} = \omega_{\bar 3}^{\bar 4} = \lambda_{11}\,\overline{e}^5 + \lambda_{12}\,\overline{e}^6 + \lambda_{13}\,\overline{e}^7,$$

$$\omega_{\bar 3}^{\bar 1} = -\omega_{\bar 1}^{\bar 3} = \omega_{\bar 4}^{\bar 2} = -\omega_{\bar 2}^{\bar 4} = \lambda_{21}\,\overline{e}^5 + \lambda_{22}\,\overline{e}^6 + \lambda_{23}\,\overline{e}^7,$$

$$\omega_{\bar 4}^{\bar 1} = -\omega_{\bar 1}^{\bar 4} = -\omega_{\bar 3}^{\bar 2} = (\omega_{\bar 2}^{\bar 3} = \lambda_{31}\,\overline{e}^5 + \lambda_{32}\,\overline{e}^6 + \lambda_{33}\,\overline{e}^7.$$

D_Λ *е* G_2*-инстантон за* $\overline{\Theta}$ *точно когато* $\mathrm{rank}(\Lambda) \le 1$.

В този случай $p_1(\mathrm{D}_\Lambda)$ *за* G_2*-инстантона* D_Λ *е*

$$8\pi^2 p_1(\mathrm{D}_\Lambda) = -4\lambda^2\, e^{1234},$$

$\lambda = |\Lambda\, A|$ *е нормата на матрицата* $\Lambda\, A$.

Решение с отрицателна α'

Теорема Конформно компактното многообразие $M^7 = (\Gamma\backslash K_A, \overline{\Theta}, \nabla^-, D_\Lambda, f)$ е G_2-многообразие, което е решение на системата на Стромингер с непостоянен дилатон f, нетривиална сила (торсия) $H = \overline{T}$, не-плосък инстантон D_Λ с първа форма на Понтрягин за ∇^- и отризателна α'.

Дилатонът f зависи от една променлива и се определя от като реална част (slice) на елиптичната функция на Ваерщтрас (Weierstrass).

Решението $M^7 = (\Gamma\backslash K_A, \overline{\Theta}, \nabla^-, D_\Lambda, f)$ удовлетворява хетеротичните уравнения на движение (**??**) до първи порядък на α'.

Скица на доказателство: От конструкцията следва, че трябва да намерим решение на условието за аномалията

$$d\overline{T} = \tfrac{\alpha'}{4} 8\pi^2 \Big(p_1(\nabla^-) - p_1(D_\Lambda) \Big)$$

В нашия случай - имаме едно нелинейно частно диференциално уравнение:

$$\triangle e^{2f} + 2|A|^2 + \frac{\alpha'}{4}\left[8\mathcal{F}_2[f] + 8\triangle_4 f - 3|A|^2 \triangle e^{-2f} + 4\lambda^2\right] = 0.$$

Нека функцията f да зависи от една променлива, $f = f(x^1)$.

За отрицателно α' избираме $2|A|^2 + \alpha'\lambda^2 = 0$.

Полагаме $\alpha' = -\alpha^2$ така, че $2|A|^2 = \alpha^2\lambda^2$.

Частното диференциално уравнение става следното обикновено уравнение

$$\left(e^{2f}\right)' + \frac{3}{4}\alpha^2|A|^2\left(e^{-2f}\right)' - 2\alpha^2 f'^3 = C_0 = const.$$

Субституцията $u = \alpha^{-2}e^{2f}$ го превръща във вида

$$\left(e^{2f}\right)' + \frac{3}{4}\alpha^2|A|^2\left(e^{-2f}\right)' - 2\alpha^2 f'^3 = \frac{\alpha^2 u'}{4u^3}\left(4u^3 - 3\frac{|A|^2}{\alpha^2}u - u'^2\right).$$

За $C_0 = 0$ решаваме следното обикновено диференциално уравнение за положителната функция $u = u(x^1) > 0$:

$$u'^2 = 4u^3 - 3\frac{|A|^2}{\alpha^2}u = 4u\,(u-d)\,(u+d)\,, \qquad d = \sqrt{3|A|^2}/\alpha.$$

Заменяйки реалните производни с комплексни получаваме уравнението на Ваерщрас

$$\left(\frac{d\mathcal{P}}{dz}\right)^2 = 4\mathcal{P}\left(\mathcal{P}-d\right)\left(\mathcal{P}+d\right)$$

за двупериодичната $\mathcal{P}$ функция на Ваерщрас с полюс в началото.

- Нека τ_+ е основният полупериод така, че τ_+ е реален. Тогава $\mathcal{P}$ е реална функция върху реалната права $\mathfrak{Re}\, z = m\tau_+$, $m \in \mathbb{Z}$.

- По този начин, $u(x^1) = \mathcal{P}(x^1)$ е неотрицателна $2\tau_+$-периодична реална функция с нули в точките $2n\tau_+$, $n \in \mathbb{Z}$, която е решение на реално ОДУ.

От конструкцията следва, че функцията $f = \frac{1}{2}\ln(\alpha^2 u)$ е периодична функция с особености върху реалната права, която е решение на условието за аномалията.

- Нека Γ е решетка със същия период, т.е. с период $2\tau_+$. Тогава G_2 структурата $\overline{\Theta}$ спуска върху 7мерното компактно нил-многообразие $M^7 = \Gamma \backslash K_A$ с особености определени от особеностите на u.

- Така M^7 е тоталното пространство на $\mathbb{T}^3$-разслоение върху асимптотично хиперболично 4-мерно многообразие M^4 с метрика

$$\overline{g}_H = u(x^1)\left((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2\right),$$

което е конформно компактен 4-мерен тор с конформна граница на бескрайност плосък 3-мерен тор.

Решения чрез контракция в размерност D=6

Да припомним: Кватернионната група на Хайзенберг K_A се определя с алгебрата на Ли $\mathfrak{K}_A$:

$$de^1 = de^2 = de^3 = de^4 = 0, \quad de^{4+i} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\sigma_j,$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Разглеждаме матрицата

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ a & 0 & -b \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Имаме: $d\overline{e^7} = de^7_\varepsilon = \varepsilon\sigma_3 \to 0$ когато $\varepsilon \to 0$,

т.е. за границата получаваме $\mathfrak{K}_A = \mathfrak{h}_5 \times R$, където $\mathfrak{h}_5$ е 6-мерна група на Ли.

G_2-формата можем да представим по следния начин:

$$\overline{\Theta}_\varepsilon = \overline{F} \wedge e^7_\varepsilon + \overline{\Psi}^+, \qquad \overline{F} = e^{2f}\omega_1 + e^{56},$$

$$\overline{\Psi}^+ = e^{2f}(\omega_2 \wedge e^5 - \omega_3 \wedge e^6), \qquad \overline{\Psi}^- = e^{2f}(\omega_2 \wedge e^6 + \omega^3 \wedge e^5).$$

В граничният случай $\varepsilon \to 0$, 2-формата $\overline{F}$, и 3-формите $\overline{\Psi}^\pm$ дефинират $SU(3)$ структура $(\overline{F}, \overline{\Psi}^\pm)$ върху 6-мерната група на Ли определенат от алгебрата на Ли $\mathfrak{h}_5$,

Тази група е $\mathbb{T}^2$ - разслоение върху $\mathbb{T}^4$ (при нулев дилатон $f = 0$).

Тази $SU(3)$-структура е решение на първите две спинорни Килингови уравнения.

2-формите на кривина $((\Omega^-_\varepsilon)^{\bar{i}}_{\bar{7}} \to 0$ за всяко i и в граничният случай 2-формите на кривина са 2-форми на кривина за свързаността ∇^- за $SU(3)$ случая.

Взимайки границата на G_2-инстантона се вижда, тази граница дефинира $SU(3)$-инстантон.

7-мерното условие за аномалията става условие за аномалията за така определената 6-мерна структура. Така получаваме 6-мерно решение с непостоянен дилатон на системата на Стромингер като граничен случай при контракция на 7-мерното решение.

.

За положително α' може да се намери некомпактно пълно решение на системата на Стромингер като дилатона зависи от 4-променливи и се определя от фундаменталното решение на стандартният лапласиан в $\mathbb{R}^4$.

Решения чрез контракция в размерност D=5

расглеждаме матрицата:

$$A_\varepsilon \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Когато $\varepsilon \to 0$ имаме

$$d\overline{e^i} = de^i_\varepsilon = \varepsilon\sigma^i \to 0, \quad i = 6, 7.$$

Границата е 5-мерната (комплексна) група на Хайзенберг, $\mathfrak{h}(2, 1)$.

По същият начин получаваме решение в размерност 5.