Tuesday Afternoon Club

(в памет на Е. В. Дейкстра)

Геометрични пресмятания и основи на геометричната алгоритмика

Бойко Банчев

boykobb@gmail.com

Институт по математика и информатика – БАН

13 октомври 2020

Потребности и действителност в геометричните пресмятания

Ефикасно изразяване на свойства, отношения и действия с точки, отсечки, прави, окръжности, многоъгълници и др.

Синтетична геометрия.

Комплексна аритметика.

Аналитична (по същество – „координатна“) геометрия.

Векторна алгебра.

Геометрична алгебра (ориентирани величини с всякакви размерности).

Отношения между посоки. Ориентация. Вектори

Направления и посоки.

Успоредност. Отвесност. Ъгли между посоки и между направления.

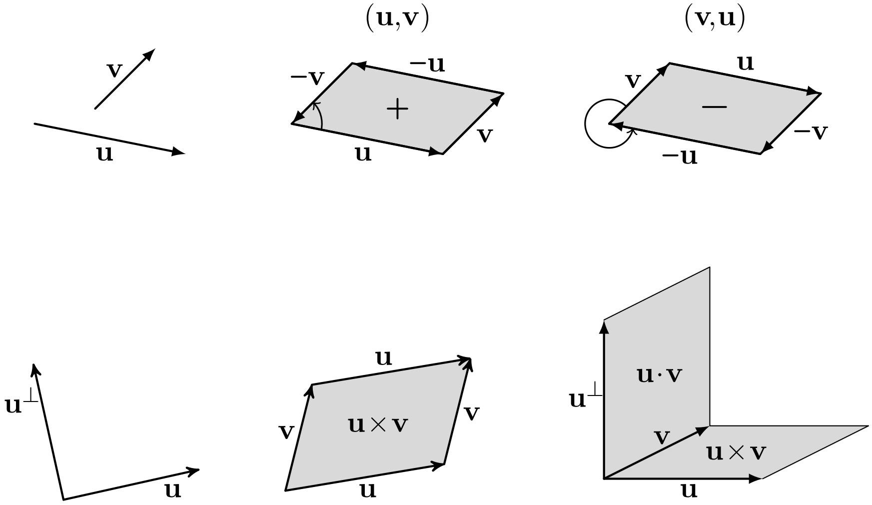
Неопределеност на ориентацията – върху права, в равнината и в пространството.

Предшестване между посоки в равнината. Ориентирани ъгли. Ориентиране на тройки точки.

Векторите – геометрични числа.

Предшестване и допълнителни операции с вектори

(освен линейните и скаларно умножение)



Геометричен смисъл на $\cdot$ и $\times$

Установяване на остър, прав и тъп ъгъл:
знакът на $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$.

Установяване на успоредност и предшестване:
знакът на $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$.

Големина на проекция на отсечка:
от $\mathbf{AB}\cdot\mathbf{u}$ като проекция на AB върху направлението на $\mathbf{u}$.

Големина на лице на триъгълник и успоредник:
$|\mathbf{AB}\times\mathbf{AC}|$ или половината от това.

Ориентация на триъгълник и други фигури:
знакът на $\mathbf{AB}\times\mathbf{AC}$ и пр.

Алгебрични свойства на обичайно изучаваните действия

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}+\mathbf{v} &= \mathbf{v}+\mathbf{u} \\
(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} &= \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \\
\mathbf{u}+(-\mathbf{u}) &= \mathbf{0} \\
\mathbf{u}-\mathbf{v} &= \mathbf{u}+(-\mathbf{v})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(-1)\,\mathbf{u} &= -\mathbf{u} \\
k\,(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= k\,\mathbf{u}+k\,\mathbf{v} \\
(k+k')\,\mathbf{u} &= k\,\mathbf{u}+k'\,\mathbf{u} \\
k\,(k'\,\mathbf{u}) &= (k\,k')\,\mathbf{u}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} &= |\mathbf{u}|^2 \\
\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} \\
(k\,\mathbf{u}+k'\,\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} &= k\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})+k'(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}) \\
|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| &\leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \\
\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos(\mathbf{u},\mathbf{v})
\end{aligned}$$

Алгебрични свойства на $\perp$ и $\times$

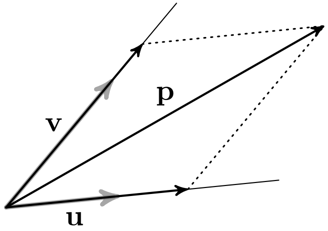
$$
\begin{aligned}
(\mathbf{u}^\perp)^\perp &= -\mathbf{u}\\
(k\,\mathbf{u} + k'\,\mathbf{v})^\perp &= k\,\mathbf{u}^\perp + k'\,\mathbf{v}^\perp\\
\mathbf{u}^\perp \cdot \mathbf{v} &= -\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}^\perp\\
\mathbf{u}^\perp \cdot \mathbf{v}^\perp &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}\times\mathbf{v} &= -(\mathbf{v}\times\mathbf{u})\\
(k\,\mathbf{u} + k'\,\mathbf{v})\times\mathbf{w} &= k\,(\mathbf{u}\times\mathbf{w}) + k'(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\\
\mathbf{u}\times\mathbf{v} &= \mathbf{u}^\perp\cdot\mathbf{v}\\
\mathbf{u}^\perp\times\mathbf{v} &= -(\mathbf{u}\times\mathbf{v}^\perp) \;=\; -(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\\
\mathbf{u}^\perp\times\mathbf{v}^\perp &= \mathbf{u}\times\mathbf{v}\\
|\mathbf{u}\times\mathbf{v}| &\leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\\
\mathbf{u}\times\mathbf{v} &= |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin(\mathbf{u},\mathbf{v})
\end{aligned}
$$

(В последното тъждество ъгълът е именно от $\mathbf{u}$ към $\mathbf{v}$.)

Разлагане на вектор

Всеки вектор $\mathbf{p}$ се разлага по кои да е два други $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, за които $\mathbf{u}\times\mathbf{v}\neq 0$ – умножавайки $\mathbf{p}=k\mathbf{u}+l\mathbf{v}$ с $\times\mathbf{v}$ и с $\mathbf{u}\times$ намираме k и l:



$$\mathbf{p} = \frac{(\mathbf{p}\times\mathbf{v})\,\mathbf{u} + (\mathbf{u}\times\mathbf{p})\,\mathbf{v}}{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}.$$

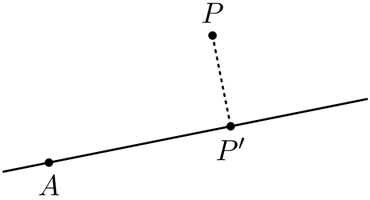
В частност, за $\mathbf{v}=\mathbf{u}^{\perp}$:

$$\mathbf{p} = \frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{p})\,\mathbf{u} + (\mathbf{u}\times\mathbf{p})\,\mathbf{u}^{\perp}}{\mathbf{u}^2}.$$

Всъщност компонентите на разлагането не зависят нито от големините, нито от конкретните посоки на $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, а само от направленията им. (Разлагането е по направленията на $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, а не по самите вектори.)

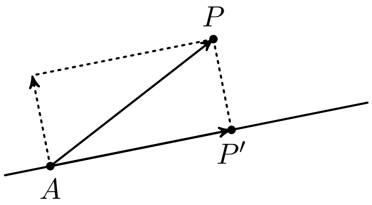
Ориентирано разстояние до права. Проекция върху права

Права $(A, \mathbf{u})$, точка P.



Ориентирано разстояние до права. Проекция върху права

Права $(A, \mathbf{u})$, точка P.



От

$$\mathbf{AP} = \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{AP})\,\mathbf{u} + (\mathbf{u} \times \mathbf{AP})\,\mathbf{u}^{\perp}}{\mathbf{u}^2}$$

следва

$$d = \mathbf{AP}_{\mathbf{u}^{\perp}} \cdot \hat{\mathbf{u}}^{\perp} = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{AP}}{|\mathbf{u}|} = \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{AP}$$

и

$$\mathbf{P}' = \mathbf{A} + \mathbf{AP}_{\mathbf{u}} = \mathbf{A} + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{AP}}{\mathbf{u}^2}\,\mathbf{u} = \mathbf{A} + (\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{AP})\,\hat{\mathbf{u}}.$$

Уравнения на права

Уравнение на правата през точки A и B се получава от изразеното чрез $\times$ условие $AP \| AB$ за точките P от правата:

$$\mathbf{AB} \times \mathbf{AP} \;=\; 0$$

или

$$\mathbf{AB} \times \mathbf{P} \;=\; c, \qquad \text{където} \quad c \;=\; \mathbf{AB} \times \mathbf{A}\,.$$

За права, успоредна на вектор $\mathbf{u}$ и минаваща през точка A:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{AP} \;=\; 0$$

или

$$\mathbf{u} \times \mathbf{P} \;=\; c, \qquad \text{където} \quad c \;=\; \mathbf{u} \times \mathbf{A}\,.$$

Параметрично уравнение:

$$\mathbf{P} \;=\; \mathbf{A} + s\,\mathbf{AB} \;=\; (1-s)\mathbf{A} + s\,\mathbf{B}$$

или

$$\mathbf{P} \;=\; \mathbf{A} + s\,\mathbf{u}\,.$$

Уравнения на прави, зададени чрез условие

Права през точка A под прав ъгъл към вектор $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{AP} = 0 \qquad \text{или} \qquad \mathbf{P} = \mathbf{A} + s\,\mathbf{u}^{\perp}.$$

Права през A под ъгъл φ към (посоката на) вектор $\mathbf{u}$:

$$(\cos\varphi\,\mathbf{u} + \sin\varphi\,\mathbf{u}^{\perp}) \times \mathbf{AP} = 0\,.$$

Вътрешна и външна ъглополовящи през A в $\triangle ABC$:

$$\begin{aligned} \mathbf{AP} \times (b\,\mathbf{c} - c\,\mathbf{b}) &= 0\,, \\ \mathbf{AP} \cdot (b\,\mathbf{c} - c\,\mathbf{b}) &= 0\,. \end{aligned}$$

Вектор $\mathbf{u}$, успореден на <u>коя да е</u> от двете ъглополовящи през A:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{b})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{c}) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{u} \times \mathbf{c}) \;=\; 0.$$

Решаване на уравнения

$$s\,\mathbf{u} + t\,\mathbf{u}^\perp = \mathbf{v} \quad\Longleftrightarrow\quad \mathbf{u} = \frac{s\,\mathbf{v} - t\,\mathbf{v}^\perp}{s^2 + t^2}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{p} = s \quad\Longleftrightarrow\quad \mathbf{p} = \frac{s}{u^2}\,\mathbf{u}^\perp + k\,\mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{p} = s \quad\Longleftrightarrow\quad \mathbf{p} = \frac{s}{u^2}\,\mathbf{u} + k\,\mathbf{u}^\perp$$

Решаване на системи от уравнения

$$\left|\begin{array}{l} \mathbf{u} \times \mathbf{p} = s \\ \mathbf{v} \times \mathbf{p} = t \end{array}\right. \quad \iff \quad \mathbf{p} = \frac{-t\,\mathbf{u} + s\,\mathbf{v}}{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}$$

$$\left|\begin{array}{l} \mathbf{u} \times \mathbf{p} = s \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} = t \end{array}\right. \quad \iff \quad \mathbf{p} = \frac{t\,\mathbf{u} + s\,\mathbf{v}^{\perp}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}$$

$$\left|\begin{array}{l} \mathbf{u} \cdot \mathbf{p} = s \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} = t \end{array}\right. \quad \iff \quad \mathbf{p} = \frac{(t\,\mathbf{u} - s\,\mathbf{v})^{\perp}}{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}$$

Частен случай на система от втория вид ($\mathbf{v} = \mathbf{u}$):

$$\left|\begin{array}{l} \mathbf{u} \times \mathbf{p} = s \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{p} = t \end{array}\right. \quad \iff \quad \mathbf{p} = \frac{t\,\mathbf{u} + s\,\mathbf{u}^{\perp}}{\mathbf{u}^2}$$

Уравнения и пресечници

Всяко векторно линейно уравнение е уравнение на права.

Параметричното уравнение на същата права – това е тъкмо решението на векторното линейно уравнение.

Радиусвекторът на пресечницата на прави е решението на системата векторни линейни уравнения на правите.

Например правите $(A, \mathbf{u})$ и $(B, \mathbf{v})$ имат уравнения съответно $\mathbf{u}\times\mathbf{AP}=0$ и $\mathbf{v}\times\mathbf{BP}=0$. Като ги приведем във вида

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\times\mathbf{P} &= \mathbf{u}\times\mathbf{A}\\ \mathbf{v}\times\mathbf{P} &= \mathbf{v}\times\mathbf{B}\end{aligned}$$

и за тази система приложим намерената формула за решение, получаваме, че пресечницата се задава с

$$\mathbf{P} = \frac{(\mathbf{u}\times\mathbf{A})\,\mathbf{v} - (\mathbf{v}\times\mathbf{B})\,\mathbf{u}}{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}.$$

Или вместо непосредствено $\mathbf{P}$ – вектор-отсечка с единия край P. Например за намиране на $\mathbf{AP}$ получаваме системата

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\times\mathbf{AP} &= 0\\ \mathbf{v}\times\mathbf{AP} &= \mathbf{v}\times\mathbf{AB},\end{aligned}$$

а решението ѝ е

$$\mathbf{AP} = \frac{\mathbf{AB}\times\mathbf{v}}{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}\,\mathbf{u}.$$

Следствие: центрове на $\triangle ABC$

Медицентър:

$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}}{3}.$$

Ортоцентър:

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= -\frac{((\mathbf{A}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{A} + (\mathbf{B}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{B} + (\mathbf{C}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{C})^{\perp}}{S} \\ &= \frac{((\mathbf{B}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{a} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{b})^{\perp}}{S} = \mathbf{A} - \operatorname{ctg} A\,\mathbf{a}^{\perp}.\end{aligned}$$

Център на $\circ ABC$ (описаната окръжност):

$$\begin{aligned}\mathbf{O} &= \frac{(\mathbf{A}^2\,\mathbf{a} + \mathbf{B}^2\,\mathbf{b} + \mathbf{C}^2\,\mathbf{c})^{\perp}}{2\,S} \\ &= \frac{((\mathbf{A}^2 - \mathbf{C}^2)\,\mathbf{a} + (\mathbf{B}^2 - \mathbf{C}^2)\,\mathbf{b})^{\perp}}{2\,S} = \frac{\mathbf{B}+\mathbf{C}}{2} + \frac{\operatorname{ctg} A}{2}\,\mathbf{a}^{\perp}.\end{aligned}$$

Център на $\circ abc$ (вписаната окръжност):

$$\mathbf{I} = \frac{a\,\mathbf{A} + b\,\mathbf{B} + c\,\mathbf{C}}{a+b+c} = \mathbf{A} + \frac{b\,\mathbf{c} - c\,\mathbf{b}}{a+b+c}.$$

Забележка

Нерядко точките (радиусвекторите) се представят като линейни комбинации не от други радиусвектори, а от вектори-страни или техни отвеси ($^{\perp}$), или от отвеси на радиусвектори на точки.

Съобщност на три прави

Ако правите са зададени с $(P_i, \mathbf{u}_i)$, $i = 1, 2, 3$, НДУ за съобщност (наличие на обща точка или общо направление, вкл. при съвпадане на две или и трите прави) са например

$$(\mathbf{u_1}\times\mathbf{u_2})(\mathbf{u_3}\times\mathbf{P_3})+(\mathbf{u_2}\times\mathbf{u_3})(\mathbf{u_1}\times\mathbf{P_1})+(\mathbf{u_3}\times\mathbf{u_1})(\mathbf{u_2}\times\mathbf{P_2}) \;=\; 0$$

и

$$(\mathbf{u_1} \times \mathbf{u_3})(\mathbf{u_2} \times \mathbf{P_2P_3}) - (\mathbf{u_2} \times \mathbf{u_3})(\mathbf{u_1} \times \mathbf{P_1P_3}) = 0\,,$$

а ако правите са A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2, НДУ е също

$$[A_1B_1B_2][A_2C_1C_2] - [A_2B_1B_2][A_1C_1C_2] = 0\,,$$

където $[PQR] = \mathbf{PQ}\times\mathbf{PR}$ е удвоеното ориентирано лице на $\triangle PQR$.

Лице на триъгълник, зададен чрез три прави

Ако правите са $(P_1, \mathbf{u_1})$, $(P_2, \mathbf{u_2})$ и $(P_3, \mathbf{u_3})$, лицето е

$$\frac{1}{2}\frac{((\mathbf{u_1}\times\mathbf{u_2})(\mathbf{u_3}\times\mathbf{P_3}) + (\mathbf{u_2}\times\mathbf{u_3})(\mathbf{u_1}\times\mathbf{P_1}) + (\mathbf{u_3}\times\mathbf{u_1})(\mathbf{u_2}\times\mathbf{P_2}))^2}{(\mathbf{u_1}\times\mathbf{u_2})(\mathbf{u_2}\times\mathbf{u_3})(\mathbf{u_3}\times\mathbf{u_1})}$$

Лице на многоъгълник

Удвоеното ориентирано лице на кой да е прост (без самопресичане) многоъгълник $P_1P_2\dots P_n$ е

$$[P_1P_2\dots P_n] \;=\; \mathbf{P_1}\times\mathbf{P_2}+\mathbf{P_2}\times\mathbf{P_3}+\cdots+\mathbf{P_n}\times\mathbf{P_1}, \quad n\geq 3.$$

и за коя да е точка X е вярно:

$$[P_1P_2\dots P_n] \;=\; [XP_1P_2]+[XP_2P_3]+\cdots+[XP_nP_1].$$

За четириъгълник:

$$[ABCD] \;=\; \mathbf{AC}\times\mathbf{BD}.$$

Пресичане на отсечки

Нека точките A_1, A_2, B_1 и B_2 са такива, че никои три от тях не лежат на една права. Тогава отсечките A_1A_2 и B_1B_2 се пресичат, когато и само когато

$$[A_1A_2B_1][A_1A_2B_2] < 0 \quad \& \quad [B_1B_2A_1][B_1B_2A_2] < 0.$$

Ако отсечките наистина имат обща точка, нейният радиусвектор е

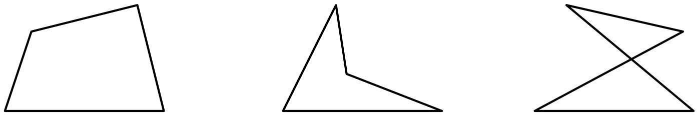
$$\mathbf{A_1} + \frac{[B_1B_2A_1]}{[B_1B_2A_1] - [B_1B_2A_2]}\,\mathbf{A_1A_2},$$

което е всъщност пресечницата на правите $A_1A_2 \cap B_1B_2$, но в този вид участващите в израза лица са вече пресметнати.

Така намирането на пресечница се спестява, когато то е ненужно (пресичат се правите, но не отсечките). Самото намиране е икономично, ползвайки вече направените при проверката за съществуване пресмятания.

Вид на четириъгълник

Кои да е четири точки, последователно свързани с отсечки в някакъв ред, могат да образуват фигура с различна форма. Предполагайки, че никои три от точките не лежат на една права, фигурата е изпъкнал, неизпъкнал или непрост четириъгълник.



Задачата за определяне кой от случаите е налице на практика съвпада с тази за установяване дали две отсечки се пресичат.

Дали четириъгълникът е квадрат, правоъгълник, успоредник и пр., както и ред други свойства, също се описват и извеждат удобно именно на езика на векторната алгебра.

Афинни преобразования

Следното просто следствие от разлагането на вектор дава образа P' на точка P при какво да е афинно преобразование, зададено с реперите (афинни к. с.) $(A, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ и $(A', \mathbf{u}', \mathbf{v}')$:

$$\mathbf{P}' \;=\; \mathbf{A}' + \frac{(\mathbf{AP} \times \mathbf{v})\,\mathbf{u}' + (\mathbf{u} \times \mathbf{AP})\,\mathbf{v}'}{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}.$$

Съответното и по-общо преобразование на вектори се определя само от *векторните* репери $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ и $(\mathbf{u}', \mathbf{v}')$:

$$\mathbf{p}' \;=\; \frac{(\mathbf{p} \times \mathbf{v})\,\mathbf{u}' + (\mathbf{u} \times \mathbf{p})\,\mathbf{v}'}{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}.$$

Еднаквости, подобия, отвесна и афинна симетрии и други частни случаи получават лаконични и удобни формули – прости следствия от горните.

Уравнения на окръжност

По зададени център C и радиус r:

$$CP = r \quad \Longrightarrow \quad CP^2 = r^2 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{CP}^2 = r^2$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{P}^2 - 2\,(\mathbf{C} \cdot \mathbf{P}) + \mathbf{C}^2 - r^2 = 0.$$

Изобщо, уравнение от вида

$$\mathbf{P}^2 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{P} + k = 0.$$

е по принцип уравнение на окръжност.

По зададени диаметрални точки A и B:

$$\mathbf{AP} \cdot \mathbf{BP} \; = \; 0.$$

($\mathbf{AP} \cdot \mathbf{BP} \leq 0$ е уравнение на кръга.)

По зададени точки A, B и C върху окръжността:

$$(\mathbf{CA} \cdot \mathbf{CB})\,(\mathbf{PA} \times \mathbf{PB}) - (\mathbf{CA} \times \mathbf{CB})\,(\mathbf{PA} \cdot \mathbf{PB}) \; = \; 0.$$

Забележка

Съществуват и други уравнения на окръжност по три зададени точки, удобни за различни цели.

Почти всички непосредствено се преобразуват и в уравнения на кръг.

Някои от уравненията са едновременно и уравнения на права, ако трите точки са сълинейни.

Като цяло – *обратно на разпространената представа* – **векторите са особено удобни за пресмятания с окръжности**, включително за намиране на пресечници, на инверсни образи, полярност и др. под.

Следният текст е своеобразен кратък справочник по основните пресмятания над пространствени геометрични обекти.
И самите обекти, и пресмятанията са описани чрез вектори.

http://www.math.bas.bg/bantchev/misc/3d.pdf

Аспекти на геометричното програмиране чрез C++

- Език за програмиране, осигуряващ възможност за много високо бързодействие на програмите.
- Възможност за лаконично и удобно изразяване на алгебричните операции с вектори.
- Наличие на необходими и ефективно реализирани СД – приоритетни опашки, множества с логаритмичен или квазиконстантен достъп и др.
- Наличие на множество основни алгоритми – за подреждане, търсене и др.

Всички изброени фактори са съществени в областта на геометричната алгоритмика и тази на компютърната графика.

Малка програмна библиотека за учебни и опитни цели:

http://www.math.bas.bg/bantchev/vecta