Векторният апарат в геометрията – същност, примери, достойнства и особености

Бойко Банчев

boykobb@gmail.com

Институт по математика и информатика – БАН

9 ноември 2021

Векторите в училищната програма (и след това)

Даваното в учебниците определение на вектор е несъстоятелно (отсечки?! краища?! колинеарност?!) и впоследствие се изоставя.

Изучаваните действия с вектори са недостатъчни – това силно ограничава възможностите за използване на векторите като инструмент на геометрията.

Ценни страни на векторния език за

- описване на свойства и отношения,
- доказване и
- извършване на построения

напълно се пренебрегват.

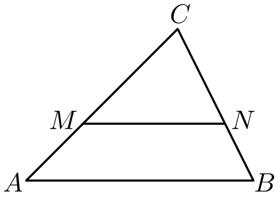
Като следствие, присъствието на векторите в училищния курс

- не е убедително мотивирано и
- изглежда самоцелно, без да носи полза.

В темата за вектори се решават една-две задачи, които лесно се решават и без тях. В другите теми вектори не се използват.

Пример: обобщение на средна отсечка

Нека точките M и N са различни и лежат на правите CA и BC през страните на $\triangle ABC$, като $\mathbf{CM} = k\mathbf{CA}$ и $\mathbf{CN} = l\mathbf{CB}$. Тогава $MN \| AB$, когато и само когато $k = l$ и когато и само когато $\mathbf{MN} = k\mathbf{AB}$.



$\ulcorner$ Преобразуването

$$\mathbf{MN} = \mathbf{CN} - \mathbf{CM} = -l\mathbf{BC} + k\mathbf{AC} = -l\mathbf{BC} + k(\mathbf{AB} + \mathbf{BC}) = k\mathbf{AB} + (k - l)\mathbf{BC}$$

ни дава представяне на $\mathbf{MN}$, от което се вижда, че

$$MN \| AB \quad \Leftrightarrow \quad k = l \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{MN} = k\mathbf{AB}. \ \lrcorner$$

Точките M и N не са непременно върху страните на $\triangle ABC$.

Доказват се няколко неща наведнъж и например няма отделни „право“ и „обратно“ твърдения, а средната отсечка е само частен случай при $k = l = \dfrac{1}{2}$.

Други действия с вектори?

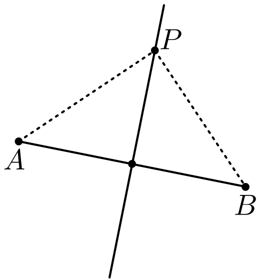
Скаларно произведение – някога присъствало в училищната програма, сега се въвежда едва във ВУЗ.

Пример 1

Търсим множеството от точки, всяка на еднакво разстояние от точки A и B, т. е. точки P, за които $PA = PB$. За целта преобразуваме условието:

$$PA = PB \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{PA}^2 = \mathbf{PB}^2 \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{PB} - \mathbf{PA}) \cdot (\mathbf{PA} + \mathbf{PB}) = 0.$$

Ако M е средата на AB, това е $\mathbf{AB} \cdot \mathbf{MP} = 0$ и описва точките P от правата през M под прав ъгъл към AB (симетрала). Това е и уравнение на симетралата.

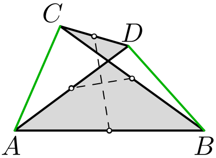


Същият резултат тълкуваме и така: медианата и височината през даден връх в триъгълник съвпадат $\Leftrightarrow$ триъгълникът е равнобедрен с бедра при този връх.

Забелязваме, че резултатът се извежда направо от условието, отново без „право“ и „обратно“ твърдения, а също без прибягване до еднаквости и други косвени средства.

Пример 2

Диагоналите на четириъгълник са равни, когато и само когато правите през средите на срещуположните страни са взаимно отвесни.



Нека четириъгълникът е $ABCD$. Условието диагоналите да са равни е $AC = BD$, което както в предния пример преобразуваме в $\mathbf{AC}^2 - \mathbf{BD}^2 = 0$, т. е. $(\mathbf{AC} - \mathbf{BD}) \cdot (\mathbf{AC} + \mathbf{BD}) = 0$.

Средите на страните пък образуват вектори, успоредни на $(\mathbf{C}+\mathbf{D}) - (\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{AC} + \mathbf{BD}$ и $(\mathbf{B}+\mathbf{C}) - (\mathbf{A}+\mathbf{D}) = \mathbf{AC} - \mathbf{BD}$, а те са взаимно отвесни, когато скаларното им произведение е 0 – същото като горното условие.

Доказателството не налага никакви изисквания за точките A, B, C и D и значи твърдението е вярно и за неизпъкнал, и за непрост четириъгълник $ABCD$.

Наблюдение

В училище се разглеждат само изпъкнали четириъгълници и то изключително частни случаи – успоредници и трапеци, вписан и описан четириъгълник. Фигурата четириъгълник в общия ѝ вид, както и възможността четириъгълникът да бъде непрост (да се самопресича) изобщо не се разглежда, което е нереалистично.

Установяването на геометрични факти за четириъгълници чрез векторен език обикновено е и по-просто, и запазва пълната общност на разглеждането, както в горния пример.

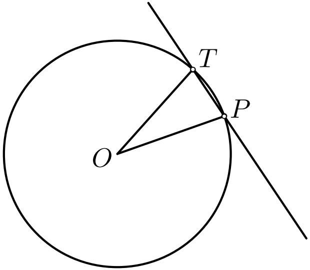
Пример 3

Общата точка T на права и окръжност с център O е единствена $\Leftrightarrow$ правата сключва прав ъгъл с OT.

⌜ Изразяваме условието $TP \perp OT$ във вида $\mathbf{TP} \cdot \mathbf{OT} = 0$ и преобразуваме:

$$\mathbf{TP} \cdot \mathbf{OT} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{OP} - \mathbf{OT}) \cdot \mathbf{OT} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{OT} \cdot \mathbf{OP} = \mathbf{OT}^2.$$

От друга страна, условието P да е от окръжността е $OP = OT$, т.е. $\mathbf{OP}^2 = \mathbf{OT}^2$. Двете условия са заедно изпълнени, т. е. P изпълнява $TP \perp OT$ и $OP = OT$, когато и само когато $\mathbf{OT} \cdot \mathbf{OP} = \mathbf{OP}^2$. Преобразуваме това в $(\mathbf{OT} - \mathbf{OP}) \cdot \mathbf{OP} = 0$, т. е. $\mathbf{PT} \cdot \mathbf{OP} = 0$. Това е равнозначно на $PT \perp PO$ и значи на $OP \| OT$, което поради $OP = OT$ е $P \equiv T$. ⌟

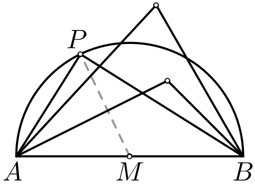


Отново резултатът се извежда непосредствено от условието, без „право“ и „обратно“ твърдения и без използване на съображения за вътре/вън спрямо окръжността.

Пример 4

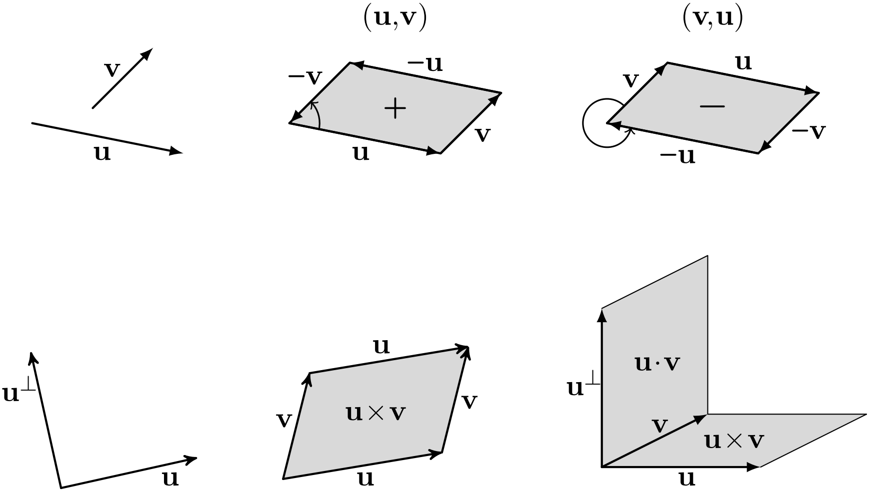
Нека A и B са различни точки и M е средата на отсечката AB. Тъй като $\mathbf{AM}+\mathbf{BM}=\mathbf{0}$, за коя да е точка P е вярно $\mathbf{BP}=\mathbf{BM}+\mathbf{MP}=\mathbf{MP}+\mathbf{MA}$. Вземайки предвид и $\mathbf{AP}=\mathbf{MP}-\mathbf{MA}$ намираме $\mathbf{AP}\cdot\mathbf{BP}=MP^2-MA^2$.

Това означава, че $\mathbf{AP}\cdot\mathbf{BP}$ е положително, отрицателно или 0 точно когато $MP>MA$, $MP<MA$ и $MP=MA$. Тъй като M е центърът, а MA е радиусът на окръжността с диаметър AB, тези три случая са налице съответно когато P е вън от окръжността, вътре или върху нея.



Следователно $\mathbf{AP}\cdot\mathbf{BP}\le 0$ е уравнение относно P на кръга с диаметър AB и равенство има точно когато P е от окръжността. Освен това, предвид геометричния смисъл на знака на скаларното произведение, $\sphericalangle(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB})$ е остър, тъп или прав съответно когато P е вън от окръжността, вътре или върху нея.

Предшестване, лицево произведение и отвес



Геометричен смисъл на $\cdot$ и $\times$

Установяване на остър, прав и тъп ъгъл:

знакът на $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

Установяване на успоредност и предшестване:

знакът на $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Големина на проекция на отсечка:

от $\mathbf{AB} \cdot \mathbf{u}$ като проекция на AB върху направлението на $\mathbf{u}$.

Големина на лице на триъгълник и успоредник:

$|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}|$ или половината от това.

Ориентация на триъгълник и други фигури:

знакът на $\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}$ и пр.

Без $\times$ нямаме алгебричен критерий за основно свойство – **успоредност**! (А също за ориентираност.)

Някои свойства

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \\
\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= -(\mathbf{v} \times \mathbf{u}) \\
\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \mathbf{u}^{\perp} \cdot \mathbf{v} \\
\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{u} \times \mathbf{v}^{\perp}
\end{aligned}$$

Ориентирано лице на три- четири- и многоъгълник

Означаваме $[ABC] = \mathbf{AB} \times \mathbf{AC}$ (ориентираното лице на успоредника, образуван от $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{AC}$, или все едно удвоеното ориентирано лице на $\triangle ABC$).

За кои да е три точки A, B и C е вярно:

$$\begin{aligned} [ABC] &= \mathbf{AB} \times \mathbf{BC} \\ &= \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} + \mathbf{C} \times \mathbf{A} \\ &= [BCA] = [CAB] = -[ACB] = -[BAC] = -[CBA]. \end{aligned}$$

Означавайки с $[ABCD]$ удвоеното ориентирано лице на четириъгълника $ABCD$, лесно намираме

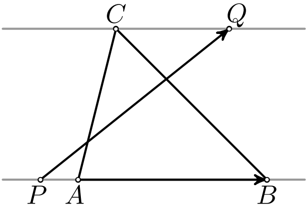
$$[ABCD] = \mathbf{AC} \times \mathbf{BD} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} + \mathbf{C} \times \mathbf{D} + \mathbf{D} \times \mathbf{A}.$$

Изобщо, удвоеното ориентирано лице $[P_1 P_2 \dots P_n]$ на кой да е многоъгълник $P_1 P_2 \dots P_n$ е равно на

$$\mathbf{P_1} \times \mathbf{P_2} + \mathbf{P_2} \times \mathbf{P_3} + \cdots + \mathbf{P_{n-1}} \times \mathbf{P_n} + \mathbf{P_n} \times \mathbf{P_1}.$$

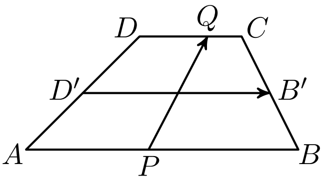
За кои да е точки A, B и C, всяка точка $P \in AB$ и всяка точка Q на правата през C, успоредна на AB е вярно

$$\mathbf{AB} \times \mathbf{PQ} = [ABC].$$



Равенството обобщава формулите за лице на успоредник и триъгълник чрез умножаване на основа и височина.

$ABCD$ е трапец с основи $AB \| CD$, B' и D' са средите на страните му BC и DA, а P и Q са кои да е точки съответно от правите AB и CD. Лицето на $ABCD$ е равно на $\mathbf{D'B'} \times \mathbf{PQ}$.



Равенството обобщава формулата за лице на трапец като произведение на средната отсечка с височината на трапеца. В частност, PQ може да бъде кое да е от бедрата на трапеца или от диагоналите му.

Уравнения на права

Успоредна на вектор $\mathbf{u}$ права през точка A:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{AP} \ = \ 0.$$

Отвесна към вектор $\mathbf{u}$ права през точка A:

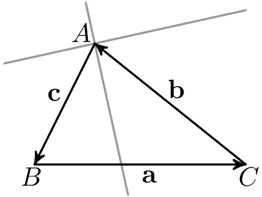
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{AP} \ = \ 0.$$

Права през A под ъгъл φ към (посоката на) вектор $\mathbf{u}$:

$$(\cos\varphi\,\mathbf{u} + \sin\varphi\,\mathbf{u}^{\perp}) \times \mathbf{AP} = 0\,.$$

Вътрешна и външна ъглополовящи през A в $\triangle ABC$:

$$\begin{aligned} \mathbf{AP} \times (b\,\mathbf{c} - c\,\mathbf{b}) &= 0\,, \\ \mathbf{AP} \cdot (b\,\mathbf{c} - c\,\mathbf{b}) &= 0\,. \end{aligned}$$



Н.д.у. вектор $\mathbf{p}$ да е успореден на <u>коя да е</u> от двете ъглополовящи през A:

$$(\mathbf{p} \times \mathbf{b})(\mathbf{p} \cdot \mathbf{c}) + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{p} \times \mathbf{c}) \ = \ 0.$$

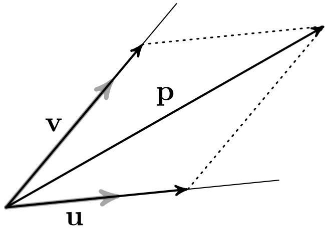
Разлагане на вектор

Всеки вектор $\mathbf{p}$ се разлага по кои да е два други $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, за които $\mathbf{u}\times\mathbf{v}\neq 0$:

$$\mathbf{p} = \frac{(\mathbf{p}\times\mathbf{v})\,\mathbf{u} + (\mathbf{u}\times\mathbf{p})\,\mathbf{v}}{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}.$$

В частност, за $\mathbf{v} = \mathbf{u}^{\perp}$:

$$\mathbf{p} = \frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{p})\,\mathbf{u} + (\mathbf{u}\times\mathbf{p})\,\mathbf{u}^{\perp}}{\mathbf{u}^2}\,.$$



Всъщност компонентите на разлагането не зависят нито от големините, нито от конкретните посоки на $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, а само от направленията им. (Разлагането е по направленията на $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, а не по самите вектори.)

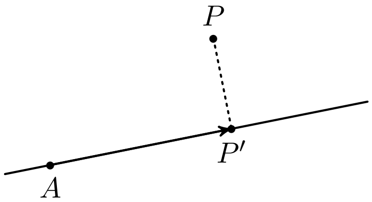
Разлагането на вектор е в основата на много преобразования и резултати, на свой ред основни за прилагането на векторния апарат в геометрията: решаване на векторни уравнения и системи, изразяване на свойства и отношения на геометрични обекти и др. Формулата за разлагане позволява не само

- да получим разлагането на даден вектор,

  но и

- да намерим неизвестен вектор, замествайки участващите в разлагането произведения според геометричния им смисъл;
- да откриваме зависимости чрез приравняване на получените по различен начин коефициенти в разлагането на вектор.

Ориентирано разстояние на точка P до права $(A, \mathbf{u})$



$$d \;=\; \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{AP}}{|\mathbf{u}|} \;=\; \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{AP}.$$

Проекцията на P е

$$\mathbf{P}' \;=\; \mathbf{A} + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{AP}}{\mathbf{u}^2}\,\mathbf{u} \;=\; \mathbf{A} + (\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{AP})\,\hat{\mathbf{u}}.$$

И двете са преки следствия от разлагането на $\mathbf{AP}$ по $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}^{\perp}$.

Решаване на система от уравнения

$$\left|\begin{aligned}\mathbf{u}\times\mathbf{p}&=s\\ \mathbf{v}\times\mathbf{p}&=t\end{aligned}\right. \quad\Longleftrightarrow\quad \mathbf{p}=\frac{-t\,\mathbf{u}+s\,\mathbf{v}}{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}$$

Решението следва пряко от разлагането на неизвестното $\mathbf{p}$ по $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Оттук на свой ред следват

$$\left|\begin{aligned}\mathbf{u}\times\mathbf{p}&=s\\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{p}&=t\end{aligned}\right. \quad\Longleftrightarrow\quad \mathbf{p}=\frac{t\,\mathbf{u}+s\,\mathbf{v}^{\perp}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}} \qquad \text{(вкл. за } \mathbf{u}=\mathbf{v}\text{)}$$

$$\left|\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{p}&=s\\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{p}&=t\end{aligned}\right. \quad\Longleftrightarrow\quad \mathbf{p}=\frac{(t\,\mathbf{u}-s\,\mathbf{v})^{\perp}}{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}$$

Пресечница на права

Например правите $(A, \mathbf{u})$ и $(B, \mathbf{v})$ имат уравнения съответно $\mathbf{u}\times\mathbf{AP}=0$ и $\mathbf{v}\times\mathbf{BP}=0$. Като ги приведем във вида

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\times\mathbf{P} &= \mathbf{u}\times\mathbf{A}\\ \mathbf{v}\times\mathbf{P} &= \mathbf{v}\times\mathbf{B}\end{aligned}$$

и за тази система приложим намерената формула за решение, получаваме, че пресечницата се задава с

$$\mathbf{P} = \frac{(\mathbf{u}\times\mathbf{A})\,\mathbf{v} - (\mathbf{v}\times\mathbf{B})\,\mathbf{u}}{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}.$$

На свой ред оттук, избирайки съответно $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ за отправна точка на радиусвекторите, непосредствено получаваме

$$\mathbf{AP} = \frac{\mathbf{AB}\times\mathbf{v}}{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}\,\mathbf{u} \qquad \mathbf{BP} = \frac{\mathbf{AB}\times\mathbf{u}}{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}\,\mathbf{v}.$$

Следствие: забележителни точки на $\triangle ABC$

Медицентър:

$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}}{3}.$$

Ортоцентър – пресечница на височините:

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= -\frac{((\mathbf{A}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{A} + (\mathbf{B}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{B} + (\mathbf{C}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{C})^{\perp}}{S} \\ &= \frac{((\mathbf{B}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{a} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{b})^{\perp}}{S} = \mathbf{A} - \operatorname{ctg} A\,\mathbf{a}^{\perp}.\end{aligned}$$

Център на $\circ ABC$ (описаната окръжност) – пресечница на симетралите:

$$\begin{aligned}\mathbf{O} &= \frac{(\mathbf{A}^2\,\mathbf{a} + \mathbf{B}^2\,\mathbf{b} + \mathbf{C}^2\,\mathbf{c})^{\perp}}{2\,S} \\ &= \frac{((\mathbf{A}^2 - \mathbf{C}^2)\,\mathbf{a} + (\mathbf{B}^2 - \mathbf{C}^2)\,\mathbf{b})^{\perp}}{2\,S} = \frac{\mathbf{B}+\mathbf{C}}{2} + \frac{\operatorname{ctg} A}{2}\,\mathbf{a}^{\perp}.\end{aligned}$$

Център на $\circ abc$ (вписаната окръжност) – пресечница на ъглополовящите:

$$\mathbf{I} = \frac{a\,\mathbf{A} + b\,\mathbf{B} + c\,\mathbf{C}}{a+b+c} = \mathbf{A} + \frac{b\,\mathbf{c} - c\,\mathbf{b}}{a+b+c}.$$

Права на Ойлер

Това е права, определена за всеки неравностранен триъгълник $\triangle ABC$ и съдържаща медицентъра, ортоцентъра, центъра на описаната окръжност и други забележителни негови точки. Може да се покаже, че правата е успоредна на вектора

$$\left((\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\, \mathbf{a} + (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\, \mathbf{b} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\, \mathbf{c} \right)^{\perp},$$

който се записва и във вида

$$(a^2 \mathbf{a} + b^2 \mathbf{b} + c^2 \mathbf{c})^{\perp}.$$

Половината от същия вектор е

$$\left((\mathbf{a} \cdot \mathbf{m_a})\, \mathbf{A} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{m_b})\, \mathbf{B} + (\mathbf{c} \cdot \mathbf{m_c})\, \mathbf{C} \right)^{\perp},$$

където $\mathbf{m_a}$, $\mathbf{m_b}$ и $\mathbf{m_c}$ са векторите-медиани през A, B и C.

Наблюдение

Като правило, намирането на формула за която и да е забележителна точка в триъгълник доказва и съществуването на точката като пресечница на три чевиани – чрез симетрията на формулата относно върховете на триъгълника.

Съобщност на три прави

Ако правите са зададени с $(P_i, \mathbf{u}_i)$, $i = 1, 2, 3$, НДУ за съобщност (наличие на обща точка или общо направление, включително съвпадане на две или и трите прави) са например

$$(\mathbf{u_1} \times \mathbf{u_2})(\mathbf{u_3} \times \mathbf{P_3}) + (\mathbf{u_2} \times \mathbf{u_3})(\mathbf{u_1} \times \mathbf{P_1}) + (\mathbf{u_3} \times \mathbf{u_1})(\mathbf{u_2} \times \mathbf{P_2}) = 0$$

и

$$(\mathbf{u_1} \times \mathbf{u_3})(\mathbf{u_2} \times \mathbf{P_2P_3}) - (\mathbf{u_2} \times \mathbf{u_3})(\mathbf{u_1} \times \mathbf{P_1P_3}) = 0\,,$$

а ако правите са A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2, НДУ е също

$$[A_1B_1B_2][A_2C_1C_2] - [A_2B_1B_2][A_1C_1C_2] \;=\; 0\,.$$

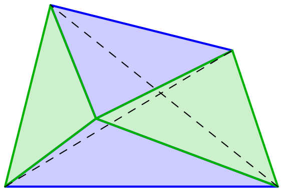
Последното е забележително с това, че макар самата формула да не съдържа вектори и действия с тях, тя се получава лесно тъкмо по векторен път и едва ли би била открита другояче.

Произведение на лица

Друг пример на геометричен факт, на който трудно бихме се натъкнали и който трудно бихме доказали, ако не ползваме векторни методи, е следният.

За кои да е точки A, B, C, D и P НДУ да е изпълнено равенството $[ABP][CDP] = [DAP][BCP]$ е да е вярно поне едното от $[ACP] = 0$ и $[BDP] = 0$.

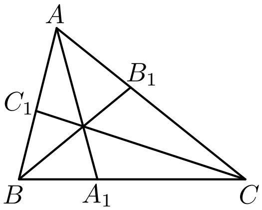
Това означава, че ако прост или непрост четириъгълник $ABCD$ разрежем с помощта на отсечки от P към върховете му на четири триъгълника, взетите „накръст“ произведения на лицата им са равни точно тогава, когато P лежи на права, съдържаща диагонал.



Теорема на Чева

За всеки $\triangle ABC$ и точки $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$ и $C_1 \in AB$, за които $\lambda = \mathbf{BA_1 : BC}$, $\mu = \mathbf{CB_1 : CA}$ и $\nu = \mathbf{AC_1 : AB}$, правите AA_1, BB_1 и CC_1 са съобщни, когато и само когато е вярно

$$\lambda \mu \nu - (1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu) = 0.$$



Правата и обратна теореми на Чева се получават наведнъж като пряко следствие от посочените формули за съобщност на три прави. Самото равенство **не е нужно да се формулира предварително**, то възниква като естествен резултат от пресмятанията.

Строгото и достатъчно общо доказване на тази теорема с други средства изисква значително по-голям обем, разделяне на правата и обратната част и разглеждане на различни случаи – например пресичащи се и успоредни прави.

Теорема на Раут за вписан триъгълник.

За всеки три точки A, B и C и точки A_1, B_1 и C_1 съответно върху правите BC, CA и AB е изпълнено

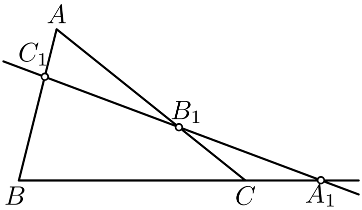
$$[A_1B_1C_1] = (\lambda\,\mu\,\nu + (1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu))\,[ABC],$$

където λ, μ и ν са както в теоремата на Чева.

Теорема на Менелай.

Нека точките A, B и C образуват триъгълник, а точките A_1, B_1 и C_1 и числата λ, μ и ν са както по-горе. Необходимо и достатъчно условие A_1, B_1 и C_1 да лежат на една права е

$$\lambda\,\mu\,\nu + (1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu) = 0.$$



Първата теорема се доказва непосредствено по условието си, изразявайки $\mathbf{A_1} = \mathbf{B} + \lambda\mathbf{a}$ и пр., а втората е нейно пряко следствие, при това наведнъж за правата и обратна теореми.

И тук не е нужно равенството да се формулира предварително, то се открива по естествен път при пресмятането.

Уравнения на окръжност през три точки

Обратно на разпространената представа,
векторите са особено удобни за пресмятания с окръжности,
включително за намиране на пресечници, на инверсни образи,
полярност и др. под.

В частност не е трудно да се намерят различни уравнения на окръжност или кръг по три точки върху окръжността. Например

$$(\mathbf{CA} \cdot \mathbf{CB})\,(\mathbf{PA} \times \mathbf{PB}) - (\mathbf{CA} \times \mathbf{CB})\,(\mathbf{PA} \cdot \mathbf{PB}) = 0$$

е уравнение на окръжността или на правата през A, B и C.

За сравненията между стойности в геометрични алгоритми

Сравняване на ъгли $\longrightarrow$ предшестване между посоки.

Сравняване на разстояния $\longrightarrow$ сравняване на лица.

Сравняване на проекции $\longrightarrow$ сравняване на скаларни произведения.

Заключение: достойнства на векторния език за геометрията

- Доказателствата и построенията се превръщат в алгебрични пресмятания по строги правила.
- Налице е възможност и се поощрява точното изразяване.
- Силно се намалява възможността за допускане на грешки.
- Няма елементи на изкуственост: допълнителни построения и други „досещания“ или изненадващи факти.
- Обикновено се избягва разглеждане на различни варианти и особени случаи (характерни за синтетичното излагане).
- Често едно или друго НДУ не се налага да се формулира предварително, а възниква в хода на пресмятането.
- Понеже пресмятанията често са еквивалентни преобразования на дадено условие, обединява се доказването на прави и обратни твърдения.
- Налице е възможност и дори подтик към обобщения.