АНАЛИТИЧНИ ФУНКЦИИ

Нека комплекснозначната функция $f(z)$ е дефинирана в множеството

Definition: Функцията е диференцируема (аналитична) в точката z_0, $z_0 \in \mathcal{G}$, ако съществува границата $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ всеки път, когато $\Delta z \to 0$. Пишем

$$\frac{\partial f(z_0)}{\partial z} = f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}. \tag{1}$$

Свойства на производната Свойствата повтарят познатите от реалния анализ, поради което ще ги изложим без доказателство.

$$(f+g)'(z) = f"(z) + g'(z),\ (fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z),$$

$$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \text{ ако } g(z) \neq 0.$$

Definition: Комплекснозначната функция се нарича **АНАЛИТИЧНА** в областта $\mathcal{D}$, ако е диференцируема във всяка точка от $\mathcal{D}$. Ще използваме означението $f \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$.

Геометрична интерпретация на производната. Нека е аналитична в z_0 и $f'(z_0) \neq 0$. $\Delta z = z - z_0$. От дефиницията (1) следва, че

$$\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|} \to |f'(z_0)|$$

и

$$\arg(f(z)-f(z_0) - \arg(z-z_0) \to \arg f'(z_0).$$

Да запишем последното във вида

$$\arg(f(z)-f(z_0) - \arg(z-z_0) \approx \arg f'(z_0).$$

Полагайки $w = f(z)$, стигаме до извода, че "в близост до точката"z_0 изображението $f(z)$ е "подобна"на линейната трансформация

$$w = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0).$$

Въпрос: Къде се използва условието $f'(z_0) \neq 0$?

Definition: Комплекснозначната функция се нарича **цяла,** ако е аналитична навсякъде в $\mathbb{C}$.

Уравнения на Коши Риман

Нека $(\mathcal{D})$ е област в $\mathbb{C}$ и $f \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$.

Представяме f във вида

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y),\ z = x + iy, (x,y) \in \mathcal{G}.$$

По-нататък пишем

$$\Delta z = \Delta x + i\Delta y.$$

Да напомним, че (1) е вярно всеки път, когато $\Delta z \to 0$. Да положим най-напред в (1) $\Delta z = \Delta x$. Тогава

$$f'(z_0) = \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}. \tag{2}$$

От друга страна, ако $\Delta z = i\Delta y$, то

$$f'(z_0) = -i\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y} + \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}. \tag{3}$$

Сравнявайки двете последни равенства, получаваме

$$u'_x(x_o,y_0) = v'_y(x_o,y_0),\ u'_y(x_o,y_0) = -v'_x(x_o,y_0) \tag{4}$$

Получените уравнения са **уравненията на Коши - Риман.** Така установихме

Теорема 1: *Необходимо условие за аналитичността на функцията $f(z)$ в точката z_0 е валидността на уравненията на Коши-Риман в тази точка. Следователно, ако $f \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$ и $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$, то (4) са изпълнени във всяка точка от областта $\mathcal{D}$.*

Definition:Функциите $u(x,y)$ и $v(x,y)$, които удовлетворяват уравненията на Коши-Риман, се наричат **ХАРМОНИЧНО СПРЕГНАТИ.**

Ще покажем сега, че условията (4) са и достатъчни за аналитичността на функцията .

Теорема 2: *Нека функцията $f(z)$, $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$, е дефинирана в околност $\mathcal{U}$ на точката z_0, нека реалната $u(x,y)$ и имагинерната $v(x,y)$ и' компоненти удовлетворяват условията на Коши-Риман (4) в тази околност*

и нека освен това $u(x,y), v(x,y) \in C^1(\mathcal{U})$. *Тогава функцията* $f(z)$ *е аналитична в точката* z_0.
Доказателство: Полагаме $\Delta z := \Delta x + \Delta y$ и изследваме диференчното частно

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} =$$

$$\frac{u(x_0 + \Delta x, y_o + \Delta y) - u(x_0, y_0) + i(v(x_0 + \Delta x, y_o + \Delta y) - v(x_0, y_0))}{\Delta x + i\Delta y} := \mathcal{L}_\Delta.$$

Този израз е добре дефиниран, ако е достатъчно малко, т.е.,кръгът с радиус се съдържа в областта $\mathcal{U}$. Нека запишем разликата

$$u(x_0 + \Delta x, y_o + \Delta y) - u(x_0, y_0)$$

като

$$[u(x_0 + \Delta x, y_o + \Delta y) - u(x_0, y_0 + \Delta y)] + [u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)]$$

Да разгледаме първия израз. От теоремата на Лагранж имаме

$$u(x_0 + \Delta x, y_o + \Delta y) - u(x_0, y_0 + \Delta y) = \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x*, y_0 + \Delta y),$$

като точката $x* \in [x, x + \Delta x)]$ е подходящо избрана. Тъй като частните производни на функциите $u(x,y), v(x,y)$ са непрекъснати в $\mathcal{U}$, то можем да го изразa във вида

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x*, y_0 + \Delta y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \varepsilon_1,$$

в който $\varepsilon_1 \to 0$, $x* \to x_0$ и $\Delta y \to 0$. И така, имаме

$$u(x_0 + \Delta x, y_o + \Delta y) - u(x_0, y_0 + \Delta y) = \Delta x \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \varepsilon_1\right].$$

Преработвайки целия израз $\mathcal{L}_\Delta$ по указания начин и прилагайки същите разсъждения, стигаме до представянето

$$\mathcal{L}_\Delta := \frac{\Delta x \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon_1 + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\varepsilon_3\right] + \Delta y \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon_2 + i\frac{\partial v}{\partial y} + i\varepsilon_4\right]}{\Delta x + i\Delta y}, \qquad (5)$$

като стойностите на частните производни се отнасят до точката (x_0, y_0).

Позовавайки се сега на уравненията на Коши-Риман, получаваме

$$\mathcal{L}_\Delta = \frac{\Delta x \left[\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right] + i\left[\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right]}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{\lambda}{\Delta x + i\Delta y},$$

с $\lambda := \Delta x(\varepsilon_1 + i\varepsilon_3) + \Delta y(\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)$. Тъй като

$$|\frac{\lambda}{\Delta x + i\Delta y}| \leq |\varepsilon_1 + i\varepsilon_3| + |\varepsilon_2 + i\varepsilon_4|,$$

то изразът в (5)приближава нулата, когато $\Delta z \to 0$. С това показахме, че функцията f е аналитична в точката $z = z_0$ и

$$f'(z_0) = \lim \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = (\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial y})(x_0, y_0).$$

Q.E.D.

Ще докажем по-нататък теоремата

Теорема 3: *Нека функцията* $f(z)$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, *е дефинирана в областта* $\mathcal{U}$, *като* $f'(z) = 0$ *навсякъде в областта. Тогава* $f \equiv Const$ *в областта* $\mathcal{U}$.

Преди да преминем към доказателството, ще обърнем внимание върху значимостта на условието за свързаност на можеството $\mathcal{U}$. Ще демонстрираме това с пример. Нека функцията е зададена по следния начин:

$$f(z) = \begin{cases} 1, & |z| < 1 \\ 0, & |z| > 2 \end{cases}$$

Очевидно теоремата не е вярна.

Доказателство: От (2) и от (3) следва, че

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

което води до равенствата $u \equiv Const$ и $v \equiv Const$ в областта $\mathcal{U}$.

Q.E.D.

Definition: Функцията h се нарича ХАРМОНИЧНА в множеството $\mathcal{D}$, ако $h \in C^2(\mathcal{D})$ и Операторът на Laplace $\Delta h := h_{x,x} + h_{y,y}$ се анулира в $\mathcal{D}$, т.е. $\Delta h = 0,\ z \in \mathcal{D}$.

В хода на досегашните разглеждания ние установихме валидността на следната

Теорема 4: *Нека $\mathcal{D}$ е област в комплексната равнина и функцията $f(z) \in \mathcal{A}(D)$. Тогава реалната компонента $u(x,y)$ и имагинерната компонента v са функции, хармонични в $\mathcal{D}$.*

Доказателството предоставяме на читателя.

Exercises:

1. Използвайте уравненията на Cauchy-Riemann, за да докажете, че функциите $f(z) =$ RE $f(z),\ f(\bar{z}),\ 2y - ix$ са "никъде диференцируеми".♣

2. Нека $f(z) \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$ и $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Докажете, че ако е изпълнено някое от следните условия, то $u \equiv Const,\ v \equiv Const, |f(z)| \equiv Const$, то $f \equiv Const$.♣

3. Нека $f(z) = \sqrt{|z^2 + z|}$. Докажете, че $f(z) \notin \mathcal{A}(\mathcal{C})$. ♣

Hint зад. 2.

4. Докажете, че не е възможно $f(z)$ и $f(\bar{z})$ да са едновременно аналитични (освен ако f не е тъждествена константа).♣

5. Нека $f(z) \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$ и $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Нека функциите u и v са записани в полярни координати (r, Θ). Докажете, че u и v удовлетворяват уравненията

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \Theta},\ -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta} = \frac{\partial v}{\partial r}.$$

♣

5. Нека $f(z)$ е дефинирана по следния начин:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{x^{4/3}y^{5/3} + ix^{5/3}y^{4/3}}{x^2y^2}, & z \neq 0 \\ 0, z = 0 \end{cases}$$

Докажете, че уравненията на Cauchy-Riemann са изпълнени в $z = 0$, но f не е диференцируема там.♣

Hint: Разгледайте поведението на $\frac{f(\Delta z)}{\Delta z}$ по реалната и по имагинерната ос.

6. Нека $h(z)$ е функция, хармонична в областта $\mathcal{D}$. Покажете, че съществува функция $f(z)$,аналитична в $\mathcal{D}$ и определена с точност до адитивна константа, такава че $\;\mathrm{Re}\; f(z) = h(z),\; z \in \mathcal{D}$.♣