8. Развитие на аналитичните функции в ред на Taylor,

аналитичност в безкрайно отдалечената точка

Продължение

Да резюмираме основния резултат
Теорема 8.7 *Нека функцията е аналитична в кръга* $K_a(R) := \{z, |z-a| < R\}$. *Тогава развитието и' в ред на* Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (z-a)^n \tag{3}$$

е сходящо във всяка точка z *от кръга и равномерно сходящо върху всеки кръг* $|z-a| \le r$ *с* $r < R$.

Да изясним въпроса къде е сходящ редът (3), т.е., да определим неговия радиус на сходимост. Знаем, че

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_a(r)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}},$$

като интегрирането се извършва върху всяка окръжност $C_a(r)$ с радиус $r < R$. Да означим с $K_a(R_0)$ максималния кръг, във вътрешността на който функцията $f(z)$ е аналитична. Тогава в горното представяне за коефициентите f_n можем да вземем всяко число $r, r < R_0$, което означава, че (3) има радиус на сходимост R_0 (или $\limsup |f_n|^{1/n} = R_0^{-1}$.)
Забележка: Сравнявайки с резултатите от Гл 6, виждаме, че

$$f_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \tag{4}$$

Да развием в ред на Taylor около $z = 1$ функцията $\mathrm{Log} z (:= \ln|z| + i\mathrm{Arg} z, .)$ Имаме

$$\frac{d^j \ \mathrm{Log} z}{dz^j} = (-1)^{j+1}(j-1)! z^{-j}, \ j = 1, 2, \cdots$$

Пресмятайки стойността в $z = 1$ получаваме

$$\mathrm{Log} z = 0 + (z-1) - (z-1)^2/2! + 2!(z-1)^3/3! - 3!(z-1)^4/4! + \cdots =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1}(z-1)^j/j.$$

Радиусът на сходимост на този ред е равен на единица. Действително, логаритмичната функция не е дефинирана в нулата.

Ще докажем

Теорема 8.8 *Нека функцията е аналитична в точката* $z = a$[1] *и има развитието* (3). *Тогава Тейлоровият ред на функцията* $f'(z)$ е

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n (z-a)^{n-1}.$$

ДоказателствоДействително, както знаем от теорията на Коши, функцията $f'(z)$ е също аналитична в точката $z = a$. Развитието и' в ред на Taylor има вида

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f'(z))^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n.$$

Твърдението по-нататък е очевидно.

Доказателството на следната теорема предоставяме на читателя.

Теорема 8.9 *Нека функциите*

$$f(z) = \sum f_n (z-a)^n, R(f) - \text{radius of convergence}$$

и

$$g(z) = \sum g_n (z-a)^n,\ R(g) - \text{radius of convergence}$$

са аналитични в точката $z = a$. *Тогава*

а: функцията $f \pm g$ също е аналитична в точката $z = a$ и

$$(f \pm g)(z) = \sum (f_n \pm g_n)(z-a)^n,$$

[1] в околност на точката $z = a$.

като радиусът на сходимост на последния ред е $\geq \min(R(f), R(g))$.
b: функцията fg също е аналитична в точката $z = a$, и

$$f(z)g(z) = \sum c_n (z-a)^n,$$

като

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k}.$$

Радиусът на сходимост удовлетворява същото неравенство.

По нататък ще се спрем на понятието аналитичност в безкрайно отдалечената точка

Definition: Функцията $f(z)$, дефинирана в околност на $z = \infty$ е аналитична в $z = \infty$, ако функцията $\phi(\zeta) := f(\frac{1}{\zeta})$ е аналитична в нулата.

Ще докажем следната

Теорема 8.10 *Нека функцията $f(z)$ е аналитична в околност на $z = \infty$. Тогава тя се разлага в ред на Тейлор*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}.$$

Редът е сходящ във всяка точка $z, |z| > \limsup |c_n|^{1/n}$ и равномерно сходящ във външността на всеки кръг $D_0(R)$ с $R > \limsup |c_n|^{1/n}$.

Доказателство: По дефиниция функцията $\phi(\zeta) := f(\frac{1}{\zeta})$ е аналитична в $z = 0$. Тогава Тейлоровото и' развитие около нулата ще има ненулев радиус на сходимост R. И така,

$$\phi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n, \; R = 1/\limsup |c_n|^{1/n} > 0, \tag{5}$$

Съгласно Th.8.7 редът (5) е сходящ за всяко $|z| < R$ и равномерно сходящ върху всеки кръг $\overline{D}_0(r), r < R$.Както знаем,

$$R = 1/\limsup |c_n|^{1/n}.$$

От (3) веднага следва първата част на нашето твърдение след полагането $\zeta = 1/z$. Останалата част следва от последните нераенства

Exercises:

1. Намерете развитието в ред на Taylor около нулата на функцията

$$f(z) := z^2 \cos \frac{1}{3z}.$$

Решение:

$$f(z) = z^2 \sum \frac{(-1)^k}{(3z)^{2k}(2k)!}.$$

2. Намерете развитието в ред на Taylor в безкрајно отделечената точка на функцията

$$f(z) = \frac{1}{z-2}.$$

Решение

$$f(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}}.$$

За стојности на z, за които $|z| > 2$, ще е вярно представянето

$$\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{2}{z})^k,$$

така че

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{z^k}.$$