ПРИЛОЖЕНИЕ НА ТЕОРЕМАТА ЗА РЕЗИДУУМИТЕ ПРИ ПРЕСМЯТАНЕ НА ИНТЕГРАЛИ

Непосредствено приложение:

Пресметнете стойността на интеграла

$$I := \oint_{C_0(2)} \frac{1-2z}{z(z-1)(z-3)}.$$

Подинтегралната функция има три прости полюса в $\mathbb{C}$, като само два от тях лежат в кръга $D_0(2)$. По теоремата за резидуумите тогава

$$I = 2\pi i[\mathrm{Rez}(0) + \mathrm{Rez}(1)].$$

Пресмятанията показват, че

$$\mathrm{Rez}(0) = \lim_{z\to 0} zf(z) = \frac{1}{3},$$

$$\mathrm{Rez}(1) = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \frac{1}{2}.$$

И така,

$$I = \frac{5\pi i}{3}.$$

Приложение при пресмятане на тригонометрични интеграли от вида

$$I = \int_0^{2\pi} U(\cos\Theta, \sin\Theta)\, d\Theta$$

като U е рационална функция на $\cos, \sin$ с реални коефициенти

Този тип интеграли се свеждат до интеграли от комплексни функции чрез използване на формулите на Euler, както и на очевидното равенство

$$z\bar{z} = 1, \text{когато } |z| = 1.$$

Пример:Пресметнете

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\Theta}{2 - \cos\Theta}.$$

Решение: Прилагайки посочените по-горе тъждества получаваме

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\Theta}}{ie^{i\Theta}(2 - \frac{e^{i\Theta}+e^{-i\Theta}}{2})} d\Theta =$$
$$= 2i \oint_{C_0(1)} \frac{dz}{z^2 - 4z + 1},$$

като $z := e^{ß\Theta}$. След решаване по стандартен начин (Теорема за резидуумите) получаваме

$$I = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Пресмятане на несобствени интеграли и на главна стойност на интеграл:

Definition: $p.v. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)dx.$

Забележка: Обърнете внимание, че в общия случай сходимостта на $p.v. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ не гарантира сходимостта на несобствения интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$. Като пример разгледайте функцията $f(x) = \frac{1}{x}$.

Пример:Пресметнете

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 4} dx.$$

Въвеждаме контура $\Gamma_R := [-R, r] \bigcup C_0^+(R)$, като $C_0^+(R)$ е полуокръжността с радиус R, намираща се в горната полуравнина, и разглеждаме интеграла

$$\int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^4 + 4} dz.$$

За R достатъчно голямо ще имаме, по теоремата за резидуумите

$$\frac{1}{z^4+4}dz = 2\pi i \mathrm{Res}(\sqrt{2}e^{\pi i/4}) + \mathrm{Res}(\sqrt{2}e^{3\pi i/4}).$$

Пресмятането на дясната страна води до резултата

$$\int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^4+4} = \int_{-R}^{R} + \int_{C_0^+(R)} \frac{1}{z^4+4}dz = \frac{\pi}{4}.$$

Сега ще оценим

$$\int_{C_0^+(R)} \frac{1}{z^4+4}dz.$$

По познат начин получаваме

$$|\int_{C_0^+(R)} \frac{1}{z^4+4}dz| \leq \frac{\pi R}{R^4-4},$$

което очевидно клони към нула, когато $R \to \infty$. Следователно,

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{\pi}{4}.$$

При решаването използвахме известната оценка

$$|\int_{\gamma} f(z)dz| \leq \|f\|_{\gamma} l(\gamma), \tag{1}$$

като с $l(\gamma)$ означаваме дължината на кривата γ. преди да продължим, ще обърнем внимание върху класически случай, когато оценката (1) води до приложими резултати, именно: ако $r(z) = p(z)/q(z)$ е рационална функция, такава, че $\deg p \leq \deg q - 2$, то

$$I_R := \int_{C_a(R)} r(z)dz \to 0,\ R \to \infty.$$

Действително, според (1)

$$|I_R| \leq C\frac{R^n}{R^m}R \leq \frac{1}{R^{m-n-1}},$$

където $n :=\ \deg p, m :=\ \deg q$, а $C-$ положителна константа, независеща от R.

В много случаи обаче оценка (1) не е достатъчна, така че се налага да се ползва по-прецизна, обстоятелство, което се решава с помощта на

ЛЕММА НА ШВАРЦ Нека f е непрекъсната върху отсечката $[a, b]$ и нека

$$|f(t)| \leq M(t), t \in [a, b].$$

Тогава

$$|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b M(t)f(t)dt.$$

Ще илюстрираме значимостта на тази лема със следния **Пример:**Пресметнете

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+1}dx.$$

Решение: Полагаме $f(z) := \frac{ze^{iz}}{z^2+1}$ и $\Gamma_R := [-R, R] \bigcup C_0^+(R)$, като посоката на горната полуокръжност $C_0^+(R)$ е положителна. По-нататък:

$$\int_{\Gamma_R} = \int_{-R}^{R} \frac{xe^{ix}}{x^2+1}dx + \int_{C_0^+(R)} \frac{ze^{iz}}{z^2+1}dz = 2\pi i \text{ Res } (i) \qquad (2)$$

Лесно пресмятаме, че

$$\text{Res } (i) = \frac{1}{2e} \qquad (3)$$

Да разгледаме сега втория интеграл в (2). Да го означим с I'_R. Ако приложим оценката (1), ще получим

$$|I'_R| \le C\frac{R^2}{R^2-1},$$

което очевидно не е профитабелно. Да приложим Лемата на Шварц. След параметризирането на полуокръжността получаваме

$$|\frac{ze^{iz}}{z^2+1}| = R|\frac{e^{iR\cos\Theta - R\sin\Theta}}{R^2e^{2i\Theta}+1}| \le R\frac{e^{-R\sin\Theta}}{R^2-1}.$$

Както знаем,

$$\frac{\sin\Theta}{\Theta} \to 1,\ \Theta \to 0.$$

Да фиксираме произволно число $\delta > 0$; тогава за всяко Θдостатъчно малко ($\Theta \le \Theta_0$) ще имаме

$$\frac{\sin\Theta}{\Theta} \ge 1-\delta.$$

Тогава

$$|I'_R| \le 2\int_{\Theta=0}^{\Theta_0} R^2\frac{e^{-R\Theta(1-\delta)}}{R^2-1}d\Theta + 2\int_{\Theta=\Theta_0}^{\pi/2} R^2\frac{e^{-R\sin\Theta}}{R^2-1}d\Theta$$

$$= 2\frac{R^2}{R^2-1}\frac{1}{R(1-\delta)}[1-e^{-R(1-\Theta_0)}]+2\int_{\Theta=\Theta_0}^{\pi/2} e^{-R\sin\Theta}d\Theta \to 0, R \to \infty.$$

От (3) и от последното равенство получаваме

$$p.v.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2+1}dx = \frac{\pi i}{2}.$$

Пример:

$$I := p.v.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{i2x}}{x^2-1}dx.$$

Избираме числа r_1, r_2, R по такъв начин, че

$$-R < -1 - r_1 < -1 + r_1 < 1 - r_2 < 1 + r_2 < R$$

с въвеждаме контура $\Gamma_{r_1,r_2,R}$, състоящ се от отсечките $[-R, -1-r_1]$, $[-1-r_1, -1+r_2]$ и $[1+r_2, R]$ и от полуокръжностите в горната полуравнина $C^+_{-1}(r_1)$, $\mathbb{C}^+_1(r_2)$ и $C^+_0(R)$, като ориентацията е положителна спрямо областта , ограничена от тези криви. Разглеждаме след това

$$I_{r_1,r_2,R} := \int_{\Gamma_{r_1,r_2,R}} \frac{ze^{2iz}}{z^2-1} \tag{4}$$

От теоремата на Cauchy имаме

$$I_{r_1,r_2,R} = 0 \tag{5}$$

Прилагайки лемата на Шварц, виждаме, че

$$\int_{C_0(R)} \frac{ze^{2iz}}{z^2-1}dz \to 0,\ R \to \infty \tag{6}$$

За да изследваме поведението на

$$I_1 := \int_{C_{-1}(r_1)} \frac{ze^{2iz}}{z^2-1}dz,$$

когато $r_1 \to 0$,представяме подинтегралната функция във вида

$$\frac{1}{z+1}\frac{ze^{2iz}}{z-1} = \frac{1}{z+1}(-e^{-2i} + \sum C_k(z+1)^k).$$

Не представлява трудност да се види, че

$$\lim_{r_1\to 0} I_1 = \frac{-i\pi e^{-2i}}{2}. \tag{7}$$

По подобен начин доказваме, че

$$\lim_{r_2 \to 0} I_2 = \frac{-i\pi e^{2i}}{2},$$

така че, с оглед на (7),

$$I_1 + I_2 \to -i\pi \frac{e^{-2i} + e^{2i}}{2}, r_1, r_2 \to 0.$$

Обединявайки последното равенство с (5) и (6), получаваме окончателно

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i2x}}{x^2 - 1} dx = i\pi \cos 2.$$

Пресмятане на интеграли от многозначни функции

Като последен пример ще разгледаме

Пример: Пресметнете

$$I := \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)}.$$

Решение:Да припомним, че по дефиниция

$$\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\log z}.$$

Тъй като $\log z$ е многозначна функция, то такава е и $\sqrt{z}$. Ако $\log z$ е фиксиран ЕДНОЗНАЧЕН клон на логаритмичната функция, т.е.

$$\log z = \ln|z| + i \text{ Arg } (z) + 2k\pi i, z \neq 0,$$

като $k - fixed$ and $\text{Arg } (z)$ принадлежи на ъгъл с амплитуда $\leq 2\pi$, то и то и $\sqrt{z}$ е еднозначен клон. В нашия случай е подходящ избора на следния еднозначен клон

$$Logz := \ln|z| + i \text{ Arg } (z),$$

като z ще се променя в цялата равнина, разрязана по положителната реална ос, т.е. $0 \leq \text{ Arg } (z) < 2\pi$. Или,

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}e^{i \text{ Arg } (z)/2},\ 0 \leq \text{ Arg } (z) < 2\pi,\ z \neq 0. \qquad (8)$$

Въвеждаме функцията

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}(z+4)}$$

и разглеждаме

$$I_{r,R} := \int_{\Gamma_{r,R}} f(z)dz,\ r < 4 < R$$

върху сложния контур $\Gamma_{r,R}$, състоящ се от окръжностите $C_0(R)$, обиколена в положителна посока, от окръжността $C_0(r)$, обиколена в отрицателна посока и от двата бряга на отсечката $[r, R]$, съответно в посока $r \longrightarrow R$ и в посока $R \longrightarrow r$. С други думи,

$$I_{r,R} = \oint_{C_0(R)} f(z)dz + \int_R^r f(z)dz - \oint_{C_0(r)} f(z)dz + \int_r^R f(z)dz \qquad (9).$$

От теоремата за резидуумите, приложена за функцията f и областта, ограничена от контура $\Gamma_{r,R}$, следва равенството

$$I_{r,R} = 2\pi i \text{Res}(-4) = \pi. \qquad (10),$$

тъй като $\sqrt{-4} = 2e^{i\pi/2} = 2i$.Да разгледаме интегралите по окръжностите. Имаме

$$|\oint_{C_0(R)} f(z)dz| \leq \|f(z)\|_{C_0(R)} 2\pi R \leq 2\pi \frac{R}{\sqrt{R}(R-4)} \to 0,\ R \to \infty. \qquad (11)$$

По същия начин и

$$|\oint_{C_0(r)} f(z)dz| \leq \|f(z)\|_{C_0(r)} 2\pi r \leq 2\pi \frac{r}{\sqrt{r}(4-r)} \to 0,\ r \to 0. \tag{12}$$

По-нататък, съгласно (8),

$$f(z) = \begin{cases} \sqrt{x}, & z = x+iy \in [r,R] \\ \sqrt{x}e^{2\pi i/2} = -\sqrt{x}, & z = x+iy \in [R,r]. \end{cases}$$

Това означава, че

$$\int_R^r f(z)dz + \int_r^R f(z)dz = \int_R^r \frac{1}{-\sqrt{x}(x+4)}dx + \int_r^R \frac{1}{\sqrt{x}(x+4)}dx =$$

$$= 2\int_r^R \frac{1}{\sqrt{x}(x+4)}dx.$$

Замествайки получения резултат в (9) и използвайки (10), виждаме, че

$$2\int_r^R \frac{1}{\sqrt{x}(x+4)}dx + \oint_{C_0(R)} f(z)dz - \oint_{C_0(r)} f(z)dz = \pi.$$

Оставяйки сега $r \to 0$ и $R \to \infty$ получаваме, на основание на (11) и (12) , че

$$I = \pi/2.$$

Exercises:

1. Като използвате теоремата за резидууми, докажете, че

а)

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\Theta}{2\cos\Theta + 5} = \frac{2\pi}{3}. \qquad \clubsuit$$

b)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\Theta}{1+\sin^2\Theta} = \pi\sqrt{2}. \qquad \clubsuit$$

2. Пресметнете

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx,\ 0 < a < 1. \clubsuit$$

Hint Разгледайте функцията $f(z) := \frac{e^{az}}{1+e^z}$ върху сложния контур Γ_R, състоящ се от отсечката $[-R, R]$, вертикалната отсечка $[R, R+2\pi i]$, хоризонталната отсечка $[R+2\pi i, -R+2\pi i]$ и вертикалната отсечка $[-R+2\pi, -R]$ (посоката на движение е такава, че вътрешността на правоъгълника да е от лявата страна на движението.)

3. Пресметнете

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}. \qquad \clubsuit$$

4. Пресметнете

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^2+1} dx. \qquad \clubsuit$$

Докажете с помощта на теоремата за резидуумите, че:

5.

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \frac{\pi}{6}. \qquad \clubsuit$$

6.

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \frac{\pi}{6}. \qquad \clubsuit$$

7.

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2} dx = -\frac{\pi}{27}. \qquad \clubsuit$$

8.

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} x dx = i\pi. \qquad \clubsuit$$

9.

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}. \qquad \clubsuit$$

10.

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{1/4}}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sin \frac{\pi}{8}. \clubsuit$$

11.

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \clubsuit$$