7. Следствия от Интегралната теорема на Cauchy

Нека $\mathcal{D}$ е област в $\mathbb{C}$ и $f \in C(\overline{\mathcal{D}})$. Според класическа теорема на WEIERSTRASS, $|f(z)|$ достига своя абсолютен максимум върху компактното множество $\overline{\mathcal{D}}$ (Chpr.2, "Непрекъснати функции"). Къде е разположен този максимум? Както знаем, абсолютния максимум е най-голямата стойност от всички локални максимуми и максимума върху границата $\partial\mathcal{D}$ на областта $\mathcal{D}$. В частния случай, когато функцията е аналитична в $\mathcal{D}$ и непрекъсната върху $\overline{\mathcal{D}}$, то отговорът се съдържа в следващата теорема, известна като **Принцип за Максимума на Модула на Аналитичните Функции**:

Теорема 7.1 : *Нека $f \in \mathcal{A}(\mathcal{D}) \bigcap C(\overline{\mathcal{D}})$. Тогава $|f(z)|$ достига абсолютния си максимум върху границата $\partial\mathcal{D}$, освен ако f не е тъждествена константа.*[1]

Доказателство: Нека $f \not\equiv Const$ и нека $\|f\|_{\overline{\mathcal{D}}} = |f(z_0)|$. Допускаме, че[2] точката z_0 е вътрешна за областта. Тогава, по формулата на Коши,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{z_0}(\rho)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \qquad (1)$$

като ρ е достатъчно малко и интегрирането е извършено в положителна посока по окръжността $C_{z_0}(\rho)$. Тъй като $f \not\equiv Const$, то съществува дъга $\gamma \in C_{z_0}(\rho)$ с положителна дължина $l(\gamma)$, такава че $|f(z)| < |f(z_0)|$ върху γ. Нека за определеност

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| - \delta, \delta > 0,\ z \in \gamma.$$

Оценявайки сега (1) с помощта това неравенство и на Теорема 5.2, получаваме

$$|f(z_0)| \leq \frac{(|f(z_0)| - \delta)l(\gamma) + |f(z_0)|(2\pi\rho - l(\gamma)}{2\pi\rho},$$

следователно

$$|f(z_0)| < |f(z_0)|,$$

[1] *Очевидно* $\mathcal{A}(\mathcal{D}) \bigcap C(\overline{\mathcal{D}}) \supset \mathcal{A}(\overline{\mathcal{D}})$.

[2] $\|f\|_{\overline{\mathcal{D}}} = \max_{z \in \overline{\mathcal{D}}} |f(z)|$

тъй като по предположение $\delta,\ l(\gamma) > 0$. Полученото противоречие се дължи на допускането, че $z_0 \in \mathcal{D}$. **Q.E.D.**

От интегралната формула на Коши следва още, че всяка аналитична функция е безброй много пъти диференцируема (сравни с Chpr 3 - "Аналитични функции"). Ще докажем

Теорема 7.2 : *Нека $f \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$ и $a \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$. Тогава е безброй много пъти диференцируема в a и*

$$f^n(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{C_{z_0}(\rho)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz, \tag{2}$$

като ρ е достатъчно малко и интегрирането е извършено в положителна посока по окръжността $C_a(\rho)$.

Доказателство: Действително, изразът $\oint_{C_{z_0}(\rho)} \frac{f(z)}{(z-a)}dz$ е, както знаем (интеграл, зависещ от параметър) диференцируема функция по a. Имаме

$$d\frac{\oint_{C_{z_0}(\rho)} \frac{f(z)}{(z-a)}dz}{da} = \oint_{C_{z_0}(\rho)} d\frac{\frac{f(z)}{(z-a)}}{da}dz = \oint_{C_{z_0}(\rho)} \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz,$$

откъдето получаваме формулата (2) за $n = 1$.

Доказателството в общия случай се предоставя на читателя. **Q.E.D.**

От теорема 7.2 получаваме **Теоремата на Лиувил**[3]

Теорема 7.3 :*Нека функцията f е цяла*[4] *и ограничена. Тогава $f \equiv Const$.*

Доказателство: Нека a е произволна точка от $\mathbb{C}$ и n е фиксирано число $\in \mathbf{N}$. От (2) имаме

$$f^{(n)}(a) = n!\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_a(r)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz,$$

[3] *Loiuville*

[4] *Аналитична във всяка точка от комплексната равнина; класа на целите функции се означава с $\mathcal{E}$*

като това представяне е вярно за всяко $r > 0$. От Th5.2 получаваме

$$|f^{(n)}(a)| \leq n!\frac{M}{r^n}.$$

Оставяйки $r \to \infty$, виждаме че

$$f^{(n)}(a) = 0$$

навсякъде в $\mathbb{C}$. Sledowatelno, $f \equiv Const$. **Q.E.D.**

Едно от приложенията на принципа на максимума на модула е **Лемата на Шварц (Schwartzs Lemma).**

Теорема 7.4 : *Нека функцията f е аналитична върху единичния кръг $D_0(1)$ и $f(0) = 0$; $\|f\|_{\overline{D}_0(1)} := M$. Тогава за всяка точка $z \in \overline{D}_0(1)$*

$$|f(z)| \begin{cases} \leq M|z| \\ = Me^{i\alpha}z \end{cases}$$

Доказателство:Въвеждаме функцията $g(z) := \frac{f(z)}{z}$. От условията на теоремата следва, че (?) $g \in \mathcal{A}(\overline{D}_0(1))$. Принципът за максимума и условието водят до оценката

$$|g(z)| \leq \|g\|_{\overline{D}_0(1)} = M.$$

От друга страна, ако $g \equiv Const$, то $|g| \equiv M$ или $g(z) \equiv Me^{i\alpha}$. С това доказателството е завършено. **Q.E.D.**

Exercises:
1. Нека $f \in \mathcal{A}(\mathcal{D}) \bigcap C(\overline{\mathcal{D}})$, като $f(z) \neq 0, z \in \overline{\mathcal{D}}$. Докажете, че $\min_{z \in \overline{\mathcal{D}}} |f|(z)$ се достига във вътрешна точка на областта $\mathcal{D}$, освен ако f не е тъждествена контанта.

2. Като използвате принципа за максимум на модула на аналитичните функции покажете, че всеки полином, който не е тъждествена константа,има поне един корен в комплексната равнина.

3. Нека $f \in \mathcal{A}(D_0(1)$, като $|f(z)| \leq 1/(1-|z|)$. Докажете, че

$$|f^(n)(0)| \leq \frac{n!}{r^n(1-r)}, \, 0, r > 1.$$

3. Нека $f \in \mathcal{A}(D_0(r)$, и е ограничена от М при $|z| \leq r$. Докажете, че

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{Mn!}{(r-|z|)^n}, \, |z| < r.$$

4. Нека $f \in \mathcal{E}$ и $\mathrm{Re}\, f$ и ограничена в $\mathbb{C}$. Докажете, че $f \equiv Const$.
Hint. Разгледайте функцията $e^{f(z)}$.

5. Нека $f \in \mathcal{A}(\mathcal{D}) \bigcap C(\overline{\mathcal{D}})$ у като $|f(z)| \equiv Const$, $z \in \partial\mathcal{D}$. Докажете, че при тези предположения съществува поне една вътрешна точка, в която $f(z) = 0$.