7. Следствия от Интегралната Формула на Cauchy -

Продължение

По същия начин, както при принципа за максимума на модула на аналитичните функции, се установява и валидността на

7.5: Принцип за максимума на хармоничните функции. *Нека функцията $h(z)$ е хармонична в областта D и непрекъсната в $\overline{D}$. Тогава тя достига максимума си във вътрешна точка на областта, освен ако не е тъждествена константа. Аналогичното твърдение се отнася и до минимума и.'*

Доказателство: Да разгледаме първо случая на кръгова област. За доказателството използваме теоремата за средните стойности на хармоничните функции (виж Th.6.7). От интегралното представяне (4), Chpt.6 получаваме твърдението за максимума на хармоничната функция за кръгова област. Твърдението на минимума следва от факта, че функцията $-h(z)$ също е хармонична и $\max(-h(z))- = \min h(z)$. По - нататъшното доказателство следва логиката на доказателството на Th.7.1. **Q.E.D.**

Принципът за максимума е недостатъчно прецизен за редица оценки. Поради това ще докажем по- силно твърдение, а именно

7.6, Теорема на Lindelöf: *Нека $f \in \mathcal{A}(K_0(R))$, и нека $z_1, \cdots, z_n$ са нулите на f в кръга.*[1] *Валидна е тогава оценката*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(Re^{i\Theta})|d\theta = \ln|f(0)| - \sum \ln\frac{R}{|z_k|}.$$

Доказателство: Ще си припомним в началото, че функцията

$$w(z) := \frac{R(z-a)}{R^2 - z\overline{a}},\ |a| < R$$

изобразява кръга $K_0(R)$ в единичния кръг, като $w(a) = 0$ и $w : C_0(R) \longrightarrow C_0(1)$. [2]Въвеждаме сега функцията

$$F(z) = \frac{f(z)}{\prod_1^n w_k(z)}$$

[1]Нулите се броят със своите кратности.

[2]Виж "Трансформации на Moebius."

където
$$w_k(z) := \frac{R(z - z_k)}{R^2 - z\overline{z_k}}.$$
Така дефинираната функция е аналитична в единичния кръг и не се анулира в него. Освен това,
$$|F(Re^{i\Theta})| = |f(Re^{i\Theta})|. \tag{3}$$
Функцията $\ln |F(z)|$ е хармонична в $K_0(R)$ ($F(z) \neq 0, z \in K_R(0)$, и непрекъсната върху затворения кръг. Следователно е вярна формулата за средните стойности, или
$$\frac{1}{2\pi} \int \ln |F(Re^{i\Theta})| d\Theta = \ln |F(0)|. \tag{4}$$
По нататък, съгласно (3)
$$\frac{1}{2\pi} \int \ln |F(Re^{i\Theta})| = \frac{1}{2\pi} \int \ln |f(Re^{i\Theta})| d\Theta,$$
а
$$\ln |F(0)| = \ln |f(0)| + \sum \ln \frac{R}{|z_k|}.$$
Така стигаме, позовавайки се на (4), до твърдението. **Q.E.D.**

Exercises:

1. Докажете, че ако $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ е полином и $\|p_n\|_{|z|\leq 1} = M$,[3] то $|a_k| \leq M$.

2. Нека функцията $f(z)$ е цяла, като , $\operatorname{Re} f(z)$ е ограничена в цялата равнина. Докажете, че $f(z)$ е константа.

Упътване : Покажете, че функцията $e^{f(z)}$ е цяла и ограничена в комплексната равнина, след което приложете теоремата на Лиувил.

3. Пресметнете
$$\|(z-1)(z+1/2)\|_{|z|\leq 1}.$$

4. Докажете, че
$$\|az^n + b\|_{|z|\leq 1} = |a| + |b|.$$

[3] $\|p_n\|_{|z|=1} := \max_{|z|=1} |p_n|$

5. Нека $P(z)$ е полином, којто няма нули върху затворената гладка Жорданова крива Г. Докажете, че броят на нулите на функцията във вътрешността на контура Г се определя от стойността на

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

Упътване :Покажете най- напред, че

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z-z_k},$$

където точките $z_k, k=1,\cdots,n$ са нулите на полинома в указаната вътрешност. [4]

[4]Нулите се броят със своите кратности