6. Интегрална Теорема и Интегрална Формула на Коши

Независимост от пътя на интегриране

Теорема 5.1 може да се изкаже по следния начин:

Теорема 6.1 : *Нека $\mathcal{D}$ е област в $\mathbb{C}$ и $f \in C(\mathcal{D})$. Нека по-нататък функцията $f(z)$ има в $\mathcal{D}$ примитивна $F(z)$, която е непрекъсната в $\mathcal{D}$. Нека z_0 и z_T са две точки от областта $\mathcal{D}$, $z_0 \neq z_T$. В такъв случай интегралът*

$$\int_{z_0}^{z_T} f(z)dz$$

не зависи от пътя на интегриране, т.е. за всяка гладка дъга γ с начална и крайна точка съответно z_0 и z_T и лежаща в $\mathcal{D}$ е вярно равенството

$$\int_{z_0}^{z_T} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz = F(z_T) - F(z_0).$$

Теорема 6.1 се нарича Теорема за Независимост от пътя на интегриране.

Следствие 6.2 : *В условията на Th.6.1*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

върху всяка гладка затворена крива γ, лежаща изцяло в областта $\mathcal{D}$.

Нашите по-нататъшни изследвания се основават на следващата

Теорема 6.3 : *Нека $\mathcal{D}$ е област в $\mathbb{C}$ и $f \in C(\mathcal{D})$. Тогава са еквивалентни следните условия:*

(1) Функцията f притежава непрекъсната примитивна в областта $\mathcal{D}$;

(2)

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

всеки път, когато гладката крива $\gamma \subset \mathcal{D}$.

(3) интегралът

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$$

не зависи от пътя на интегриране;

Доказателство: Тъй като импликациите (1)$\longmapsto$ (2)$\longmapsto$ (3) вече са доказани (Теорема 6.1 и Следствие 6.2), то ще се спрем на импликацията (3)$\longmapsto$ (1).

Фиксираме точката $z_0 \in \mathcal{D}$ и нека $z \in \mathcal{D}$. Полагаме

$$\Phi(z) := \int_{z_0}^{z} f(z)dz.$$

Ще покажем, че така дефинираната функция е непрекъсната примитивна на f в $\mathcal{D}$.

За тази цел ще покажем, че

$$\frac{F(z+\Delta z) - F)z)}{\Delta z} \to f(z), \Delta z \to 0.$$

Действително,

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{\int_z^{z+\Delta z}(w)dw}{\Delta z},$$

като съгласно (3) интегрирането се извършва по произволна гладка крива от z към $z+\Delta z$. Интегрираме тогава върху отсечката $[z, z+\Delta z]$, като без да нарушаваме общността считаме, че тя лежи в областта $\mathcal{D}$. По-нататък съгласно Teorema 5.2

$$|\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{\int_z^{z+\Delta z}(f(w) - f(z)dw}{\Delta z}| \leq \|f(w) - f)z)\|_{[z,z+\Delta z]}| \to 0 \text{ as } \Delta z \to 0.$$

С това теоремата е доказана. **Q.E.D.**

Definition: Непрекъсната трансформация на затворени криви

Definition: Нека $\gamma_1 : z = z_1(t, t \in [\alpha_1, \beta_1])$ и $\gamma_2 : z = z_2(t, t \in [\alpha_2, \beta_2])$ са две гладки криви. Казваме, че γ_2 се получава чрез непрекъсната трансформация на $\gamma - 1$, ако съществува функция $z(s,t)$, $0 \leq t, s \leq 1$ със следните свойства:
$z \in C^2([0,1]x[0,1])$;
За всяка двойка $(s,t) \in [0,1]x[0,1$ образът на $z(s,t)$ е гладка крива;
За всяко фиксирано $s \in [0,1]$ функцията $z(0,t)$ параметризира криватата γ_1;

За всяко фиксирано $s \in [0,1]$ функцията $z(1,t)$ параметризира кривата γ_2.
Например, функцията

$$z(s,t) := (1+s)e^{2\pi it},\ 0 \leq s,t \leq 1$$

е непрекъсната трансформация на $C_0(1)$ в $C_0(2)$.

Ще казваме в бъдеще, че двете криви са **непрекъснато трансформируеми една в друга или хомотопни.**

Ще докажем валидността на
Теорема 6.4 : *Нека $\mathcal{D}$ е област в $\mathbb{C}$ и $f \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$. Нека γ_1, γ_2 са две затворени хомотопни криви, принадлежащи на $\mathcal{D}$. Тогава*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Доказателство: фиксираме $s \in [0,1]$ и полагаме $\gamma(s) := z(s,t), t \in [0,1]$. Ще покажем, че функцията $I(s) := \int_{\gamma(s)} f(z)dz$е тъждествена константа. Действително,

$$\int_{\gamma(s)} f(z)dz = \int_{\gamma(s)} f(z(s,t))\frac{\partial z(s,t)}{\partial t}dt.$$

Изследвайки производната на $I(s)$, получаваме

$$I'(s) = \int_{\gamma(s)} f(z(s,t))\frac{\partial z(s,t)}{\partial t}dt = \int_{\gamma(s)} [\frac{\partial f(z(s,t))}{dt}\frac{\partial z(s,t)}{\partial s}\frac{\partial z(s,t)}{\partial t} + f(z(s,t))\frac{\partial^2 z(s,t)}{\partial s \partial t}]dt.$$

От друга страна,

$$\frac{\partial}{dt}(f(z(s,t))\frac{\partial z(s,t)}{\partial s}) = \frac{\partial f(z(s,t))}{dt}\frac{\partial z(s,t)}{\partial t}\frac{\partial z(s,t)}{\partial s} + f(z(s,t))\frac{\partial^2 z(s,t)}{\partial t \partial s}.$$

От теоремата на Weierstrass за независимостта на частните производни от реда на диференциране получаваме

$$\frac{dI(s)}{dt} = \int_0^1 \frac{\partial}{dt}[f(z(s,t))\frac{\partial z(s,t)}{\partial s}]dt = f(z(s,1))\frac{\partial z(s,t)}{\partial s}(s,1) - f(z(s,1))\frac{\partial z(s,t)}{\partial s}(s,0).$$

Но кривите $\gamma(s)$ са затворени, което означава, че $z(s,0) = z(s,1)$. Следователно, за всяко $s \in [0,1]$

$$I(s) = \int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Q.E.D.

Вече сме в състояние да представим класическия резултат на Коши

Теорема 6.5, ИНТЕГРАЛНА ТЕОРЕМА НА CAUCHY : *Нека $\mathcal{D}$ е едносвързана област в $\mathbb{C}$ и $f \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$. Тогава*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

върху всяка затворена крива γ в $\mathcal{D}$.

Доказателство:[1]Следва от факта, че всяка затворена крива в $\mathcal{D}$ може да се "свие"до една точка. От друга страна, интегралът върху "свиваща се крива"клони към нула (?). **Q.E.D.**

От теоремите 6.5 и 6.6 получаваме

Теорема 6.6 *Нека $\mathcal{D}$ е област в $\mathbb{C}$ и $f \in \mathcal{A}(\mathcal{D}) \bigcap C(\overline{\mathcal{D}})$. Да означим с Γ границата на областта $\mathcal{D}$. Тогава е вярно следното твърдение*

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0.$$

Без да нарушаваме общността ще предполагаме, че Γ е гладка крива. Доказателството предоставяме на читателя.

Интегралната теорема на Коши индикира връзката между аналитичността на една функция и съществуването на непрекъсната примитивна на същата функция. По-точно, валидна е

[1] *Има няколко доказателства на теоремата на Коши - класическото, основаващо се на топологична конструкция, както и изграденото на векторния анализ. Настоящето доказателство е заимствано от монографията на E.B.Saff i A.D.Snider "Foundamentals of complex analysis.*

Теорема 6.7 *Нека $\mathcal{D}$ е едносвързана област в $\mathbb{C}$ и $f \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$. Тогава f има непрекъсната примитивна и контурният интеграл от f не зависи от пътя на интегриране.*

Доказателство: Следва от ТН.6.3.

Сега ще докажем **Интегралната Формула на Коши:**

Теорема 6.8 *Нека $\mathcal{D}$ е област в $\mathbb{C}$ и $f \in \mathcal{A}(\mathcal{D}) \bigcap C(\overline{\mathcal{D}})$. Да означим с Γ границата на областта $\mathcal{D}$. Тогава, за всяка вътрешна за областта $\mathcal{D}$ точка a е валидно представянето*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Доказателство: *Полагаме $\oint_{|z-|=r} = \int_{C_a(r)}$, като интегрирането се извършва веднаж в положителна посока.*

Da разгледаме в началото $\oint_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz$, като параметърът r е толкова малък, че затвореният кръг $\overline{\mathcal{K}}_a(r) \subset \mathcal{D}$. Имаме

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{i\Theta})}{re^{i\Theta}} ire^{i\Theta} d\Theta.$$

Оставяйки сега $r \to 0$, получаваме

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=r} f(z) dz = f(a).$$

По-нататъшния ход на доказателството се опира на Th. 6.6, приложена спрямо функцията $\frac{f(z)}{z-a}$ и областта $\mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{K}}_a(r)$ с r - достатъчно малко число. **Q.E.D.**

Exercises:

1. Докажете, че

$$\int_{C_a(\rho)} \frac{dz}{(z-a)^m} = \begin{cases} 0, & m \neq 1 \\ 2\pi i, & m = 1 \end{cases} \qquad \clubsuit$$

2. Докажете, че

$$\int_{C_0(\rho)} \frac{dz}{(z-a)} = \begin{cases} 0, & |a| > \rho \\ 2\pi i, & |a| < \rho \end{cases} \qquad \clubsuit$$

3. Кои от следните области са едносвързани?
a) $\{z, |\ Im\ z| < 1\}$;
b) $\{z, 1 < |z| < 2\}$;
c)$\{z, |z| < 1\}$;
d) $\{z, |z| > 1\}$;
e) $\{z, |z| < 1\} \setminus \{z, 0 < \ Re\ z < 1\}$. $\clubsuit$
3. Пресметнете

$$\int_{\int} \frac{1}{1+z^2} dz,$$

като пътят $\int$ *е отсечката* $[1, 1+i]$. $\clubsuit$
4. Покажете, че ако $f(z)$ *има вида*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{z^k} + g(z),$$

където$g(z)$ *е аналитична извън* $C_0(1)$*, то*

$$\oint_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i A_1.$$

$\clubsuit$

Пояснение: по дефиниция $\oint_{|z|=1} := \int_{C_0(1)}$. $\clubsuit$
5. Нека P *е полином от степен* ≥ 2*, всичките нули на който лежат в кръга* $\mathcal{D}_\prime(\mathcal{R}), R > 0$*. Покажете, че*

$$\oint_{|z|=R} f(z) dz = 0. \clubsuit$$

Hint *Приложете Th.6.6 за венеца* $\{z, R < |z| < R + r\}$ *и оставете след това* r *да расте неограничено.* $\clubsuit$