2. Задача наDirichlet за кръга

Definition: *Нека* D *е област в* $\mathbf{C}$ *и функцията* ϕ, *дефинирана върху* ∂D *е реалнозначна и непрекъсната* $(\phi \in C_R(\partial D).)$ *Казваме, че функцията* h *решава задачата на Дирихле за* D *с начални данни* ϕ, *ако* $h \in \mathcal{H}(D)$ *и* $\lim_{z\to\zeta} h(z) = \phi(\zeta)$ *за всяко* $\zeta \in \partial D$.

Означения: $\Delta(w,r) := \{z, |z-w| < r,\}$, $\Delta := \Delta(0,1)$.
Теорема 2.1. - Теорема за единственост на решението на задачата на Дирихле.$D-$*област в комплексната равнина и* $\phi \in C(\partial D)$. *Тогава, ако съществува решение на Задачата на Дирихле за областта* D *относно* ϕ, *то то е единствено.*
Доказателство : *Следва от* Th.1.7. **Q.E.D.**

Definition: - Ядро на Poisson $P(z,\zeta) : P(z,\zeta) : \Delta(0,1) \times \partial\Delta(0,1) \longrightarrow$ R,*като*

$$P(z,\zeta) := \mathrm{Re}\frac{\zeta + z}{\zeta - z},\ |z| < 1, |\zeta| = 1.$$

Директно се пресмята, че

$$P(z,\zeta) = \frac{1-|z|^2}{|z-\zeta|^2}.$$

Definition: *Нека функцията* $\phi \in C_R(\partial\Delta(w,\rho))$ *и* $z = w + re^{it} \in \Delta(w,\rho)$. *Полагаме*

$$P_\Delta(\phi)(w + re^{it}) = P_\Delta(\phi)(z) := \frac{1}{2\pi}\oint_0^{2\pi} P(\frac{z-w}{\rho}, e^{i\theta})\phi(w + \rho e^{i\theta})d\theta.$$

Предоставяме на читателя да провери, че

$$P_\Delta(\phi)(w + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\oint_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - |z|^2}{\rho^2 + |z|^2 - 2\cos(\theta - t)}\phi(w + \rho e^{i\theta})d\theta.$$

Теорема 2.2. $\varphi \in C_R(\partial\Delta(w,\rho))$. *Тогава*
a) $P_\Delta(\phi) \in \mathcal{H}(\Delta(w,\rho))$;
b) $P_\Delta(\phi)(z) \to \varphi(z_0)$, $z_0 \in \partial\Delta(w,\rho)$*всеки път, когато* $z \to z_0$, $z \in \Delta(w,\rho)$.

Доказателство : Без да нарушаваме общността ще считаме, че $w = 0$ и $\rho = 1$.

Твърдението a) следва от представянето

$$P_\Delta(\phi)(z) = \mathrm{Re}\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=1} \frac{z+\zeta}{-z+\zeta}\varphi(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Дясната част на това равенство е реалната компонента на аналитична върху кръга Δ функция.

По-/нататъшното доказателството на теоремата се базира върху следващата

Лема 2.3: a) $P(z,\zeta) > 0, |z| < 1, |\zeta| = 1.$

b)

$$\frac{1}{2\pi}\oint_0^{2\pi} P(z,\zeta)d\theta = 1,\ |z| < 1.$$

c) За всяко $z_0 \in \partial\Delta$ и $\delta > 0$ е вярно

$$\sup_{|\zeta|=1,\,|\zeta-z_0|>\delta} P(z,\zeta) \to 0 \text{ всеки път, когато } z \to z_0, |z| < 1.$$

Твърдението a) е очевидно, а b) следва от равенството

$$\frac{1}{2\pi}\oint_0^{2\pi} P(z,\zeta)d\theta = \frac{1}{2\pi i}\mathrm{Re}\oint_{|\zeta|=1} \frac{z+\zeta}{\zeta-z}\frac{1}{\zeta}d\zeta.$$

За c) имаме:

$$P(z,\zeta)_{|\zeta-z_0|>\delta} \le \frac{1-|z|^2}{\delta-|z_0-z|^2} \to 0.$$

Твърдението c) следва веднага от тази оценка **Q.E.D.**

Доказателство на Теорема 2.2; Нека $z_0 \in \partial\Delta$. Фиксираме произволно число $\varepsilon > 0$. Търсим $\delta > 0$ такова, че

$$|P_\Delta\varphi(z) - \varphi(z_0)| < \varepsilon$$

всеки път, когато

$$|z - z_0| < \delta.$$

Имаме, съгласно a)

$$|P_\Delta\varphi(z) - \varphi(z_0)| = |P_\Delta\varphi(z) - \varphi(z_0)\frac{1}{2\pi}\oint P(z,\zeta)d\theta| =$$

$$|\frac{1}{2\pi}\oint_0^{2\pi}\frac{\rho^2-|z|^2}{\rho^2+|z|^2-2\rho r\cos(\theta-t)}(\phi(e^{i\theta})-\phi(z_0))|. \tag{1}$$

Нека числото $M\geq \max\,(1, \max_{z,w\in\partial\Delta}|\varphi(z){-}\varphi(w)|;$, фиксираме сега $\varepsilon_1<\varepsilon/4M\pi$. От непрекъснатостта на φ върху $\partial\Delta$ следва съществуването на δ_1, такова, че

$$|\phi(\zeta)-\phi(z_0)|<\varepsilon_1, \text{ако} |\zeta-z_0|<\delta_1. \tag{2}$$

От друга страна, според c) от лема 2.3,

$$\sup_{|\zeta-z_0|>\delta_1} P(z,\zeta)<\varepsilon_1, \text{ ako } |z-z_0|<\delta_2,\ \delta_2 - \text{достатъчно малко.} \tag{3}$$

Понататък ще разглеждаме такива $z\in\Delta$,че $|z-z_0|\leq\ \min\,(\delta_1,\delta_2)$. Представяме сега интеграла от (1) като сума на два интеграла: $I_1:|\zeta-z_0|<\delta,$ и$I_2:|\zeta-z_0|>\delta$. За I_1 и I_2 имаме, сьответно

$$|I_1|\leq\varepsilon_1\int_{|\zeta-z_0|\leq\delta}P(z,e^{i\theta})d\theta\leq\varepsilon_1,$$

$$|I_2|\leq\varepsilon_1 M2\pi$$

Твърдението следва от произволността на избора на числото ε_1.
Q.E.D.
Теорема 2.3.-Формула на Poisson. *$h\in\mathcal{H}(\Delta(w,\rho))$ и $z=w+re^{it}$, $r<\rho$. Тогава*

$$h(z)=P_\Delta h(z)=\frac{1}{2\pi}\oint_0^{2\pi}\frac{\rho^2-|z|^2}{\rho^2+|z|^2-2\cos(\theta-t)}h(w+\rho e^{i\theta})d\theta. \tag{4}$$

Вярна е и обратната теорема, именно
Теорема 2.4. *Нека $h\in C(\Delta(w,\rho)$ и нека навсякъде в $\Delta(w,\rho)$ е вярна формулата (4) на Поасон за средните стойности. Тогава $h\in\mathcal{H}(D)$.*

Exercise 1. Нека $h\in\mathcal{H}(\Delta)$ и $f\in\mathcal{A}(\Delta)$ е функция, такава, че Re$f=h$ върху Δ (вж.Теорема 1.2.) Тогава

$$f(z)-f(0)=\frac{1}{2\pi}\oint_0^{2\pi}\frac{2z}{\zeta-z}h(\zeta)d\theta,\ \zeta=e^{i\theta}.$$