ФУНКЦИИТЕ e^z, $\log z$ **и** z^α

Експоненциалната функция e^z :
$e^z = e^x e^{iy}$, $|e^z| = e^x$, $\arg e^z = y$.

Следните свойства лесно се проверяват:
1.

$$e^z = e^{z+2k\pi i},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \tag{1}$$

2. Образът на правата $y = a$ е лъчът през началото, сключващ с положителната част на реалната права ъгъл $= a$.
3. Образът на правата $x = a$ е окръжността с център в нулата и радиус $\exp a$.

Оттук стигаме до, отчитайки, че $\frac{\partial e^z}{\partial z} = e^z \neq 0$,

Теорема 1 *Функцията e^z е еднолистна и конформна във всяка ивица, успоредна на реалната права $a \leq \ \mathrm{Im}\ z \leq a + l$ с широчина $l \leq 2\pi$ и я изобразява върху безкрайния ъгъл $a \leq \ \arg z \leq a + l$.*

Забележка: ако ивицата има широчина $= 2\pi$, то образът е цялата равнина с разрез по лъча $a = \ \arg z$.

Логаритмична функция

Definition: Всяко решение ω на уравнението

$$z = e^\omega,\ z \neq 0 \tag{2}$$

ще означаваме с $\log z$.

Нека $z = x + iy = |z|e^{i\arg z}$, $\omega = w_1 + iw_2$. От (2) имаме

$$|z|e^{i\arg z} = e^{w_1 + iw_2},$$

откъдето следват равенствата

$$|z| = e^{w_1},\ w_2 = \arg z + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

Така получаваме

$$\log z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{3}$$

От дефиницията следва, че

$$e^{\log z} = z,$$

но

$$\log e^z = z + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

Definition:Логаритмичната функция $\log z$ е дефинирана за $z \neq 0$ и е която и да е стойност на израза

$$\log z = \ln |z| + i(\mathbf{arg}z + 2k\pi),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

Логаритмичната функция е многозначна функция. Многозначността и' се обуславя от многочначността на аргумента, както и от произволността на параметъра k; реалната компонента е еднозначно определена.
Забележка 1: Познатите от реалния анализ свойства на логаритмичната функция

$$\log(z_1 z_2) = \log(z_1) + \log(z_2),\ \log(z_1/z_2) = \log(z_1) - \log(z_2)$$

се запазват, с важната уговорка, че сега става дума за равенство на класове от стойности на k. от
Definition:Клонът на логаритмичната функция, при който $k = 0$ и $0 \leq$ arg $< 2\pi$, се наричаГлавен Клон на Логаритъма и се бележи с Log z, т.е.

$$\mathbf{Log}\ z := \ln |z| + i(\mathbf{arg}z),\ 0 \leq \mathbf{arg}z < 2\pi.$$

В бъдеще ще пишем

$$\log_\tau z = \ln |z| + i(\mathbf{arg}z),\ \ \textbf{като}\ \tau \leq \mathbf{arg} < 2\pi + \tau.$$

Забележка 2: Дискутираните свойства не се запазват, т.е., в общия случай не е вярно, че

$$\log_\tau(z_1 z_2) = \log_\tau(z_1) + \log_\tau(z_2),\ \log_\tau(z_1/z_2) = \log_\tau(z_1) - \log_\tau(z_2).$$

Например, $\text{Log}(z_1 z_2) \neq \text{Log} z_1 + \text{Log} z_2$, ако $z_1 = i$, $z_2 = i - 1$.
Теорема 2*Всеки клон на логаритмичната функция $\log_\tau z$ е диференцируема функция в $\tau \leq arg < 2\pi + \tau$ и*

$$\frac{\partial \log_\tau z}{\partial z} = \frac{1}{z}.$$

Доказателство: Нека $z_0 \neq 0$. Без да нарушаваме общността, ще докажем теоремата за главния клон на логаритъма. За целта ще изследваме поведението на израза $\frac{\text{Log } z - \text{Log } z_0}{z - z_0}$, когато $z \to z_0$. Полагаме

$$\text{Log } z := w, \text{ Log } z_0 := w_0.$$

Тогава

$$\frac{\text{Log } z - \text{Log } z_0}{z - z_0} = \frac{w - w_0}{e^w - e^{w_0}}.$$

От непрекъснатостта на логаритмичната функция следва, че $w \to w_0$. Но, както знаем, експоненциалната функция е диференцируема навсякъде, т.е.

$$\frac{w - w_0}{e^w - e_0^w} \to \frac{1}{e^{w_0}} = \frac{1}{z_0}, \; w \to w_0.$$

С това твърдението е доказано. **Q.E.D.**

От общите свойства на аналитичните функции получаваме

Следствие 1: *Функцията* $\arg$ *е хармонична в областта* $\mathcal{D}* := \mathbb{C} \setminus \{z, x \leq 0, y = 0\}$.

Следствие 1: *Функцията* $\ln |z|$ *е хармонична в цялата комплексна равнина с изключение на точката* $z = 0$.

Definition:Казваме, че функцията $F(z)$ е еднозначен клон на многозначната функция $f(z)$ в областта $\mathcal{D}$, ако е еднозначната и непрекъсната в $\mathcal{D}$ и освен това зза всяко $z \in \mathcal{D}$ величината $F(z)$ е едно от значенията на $f(z)$.

Например, $\text{Log } z$ е еднозначен клон на $\log z$ в областта $\mathcal{D}*$; функцията, дефинирана посредством $e^{\frac{1}{2}\text{Log} z}$ е еднозначен клон на $z^{1/2}$, чиито стойности лежат в дясната полуравнина.

функция z^{α} :

Definition:За $z \neq 0$ функцията

$$z^{\alpha} := e^{\alpha \log z} = e^{\alpha(\ln |z| + i \text{ arg } z + 2k\pi i}, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

От дефиницията следва, че функцията z^{α} допуска избор на еднозначен аналитичен клон във всяка област, която се получава, като разрежем Гаусовата равнина по лъч през началото и я изобразява в безкраен ъгъл с ширина $= 2\pi/\alpha$. Освен това z^{α} е диференцируема и

$$\frac{\partial z^\alpha}{\partial z} = \alpha z^{\alpha-1}.$$

Exercises:
1. Докажете, че $\mathrm{Log} e^z = z \Longleftrightarrow \pi \leq \ \arg z < \pi$.
2. Посочете грешката в следните разсъждения: $z^2 = (-z)^2, \Longrightarrow 2\mathrm{Log}\ z = 2\mathrm{Log}\ (-z), \Longrightarrow \mathrm{Log}\ z = \mathrm{Log}\ (-z), \Longrightarrow z = e^{\mathrm{Log}\ z} = e^{\mathrm{Log}\ (-z)} = -z$.
3. Посочете всички "типове"области, в които функцията $\sqrt{1-z^2}$ допуска избор на еднозначен аналитичен клон.
4. Нека функцията $f(z) := \sqrt{1-z^2}$ е дефинирана в цялата равнина, разрязана по отсечката $[-1,1]$, като е взет този еднозначен клон, при който $f(i) > 0$. Да се пресметне $f(0^+)$ и $f(0^-)$.
5.Пресметнете всички стойности на i^i и на $2^{\pi i}$.
6. Покажете, че $1^0 = 1$.
7. Вярно ли е твърдението $1^z = 1,\ z \in \mathbb{C}$.