Lineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, \\ a_1, & b_1, & c_1, \\ a_1, & b_1, & c_1, \end{vmatrix}.$$

Definition: Seien die skalaren Funktionen $F_i, i = 1, \cdots, n$ gegeben, $F_i : R^{n+1} \longrightarrow R$. Gesucht sei $u(t); R \longrightarrow R^{n+1}$ derart, daß

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= F_1(t, u_1(t), \cdots, u_n(t)) \\ u_2'(t) &= F_1(t, u_1(t), \cdots, u_n(t)) \\ &\cdots \\ u_n'(t) &= F_1(t, u_1(t), \cdots, u_n(t)) \end{aligned} \qquad (1)$$

Wir sagen, daß das System (1) eine Lösung auf dem Intervall $[a, b]$ besitzt, wenn es n skalare Funktionen $\phi_i \in C'[a, b]$ gibt, die in allen Punkten aus $[a, b]$ (1) erfuellen. Es koennten zusaetzliche Vorbedingungen gestellt werden, naemlich

$$u_i(t_0) = u_i \in R, i = 1, \cdots n \qquad (2).$$

Zusammen mit (1) fuehren sie dann zu einem Anfangswertproblem.

Gültig ist folgender Satz:

Satz 1: *Sei $B \subset R^{n+1}$, $(t_0, u_1, \cdots, u_n) \in B$ und seien $F_1, \cdots, F_n \in C^2(B)$. Dann existiert ein Intervall $[t_0 - h, t_0 + h]$, derart, daß das Anfangswertproblem bestimmt durch (1) und (2) eindeutig løsbar ist.*

Es besteht enger Zusammenhang zwischen Systemen und Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Tatsächlich, sei

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}). \qquad (3)$$

Wir setzen

$$u_1 = y,\ u_2 = y',\ \cdots, u_n = y^{(n-1)}.$$

Dann wird (3) zu

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2, \\ u_2' &= u_3, \\ &\cdots \\ u_{n-1}' &= u_n. \end{aligned}$$

Die Gleichung (3) liefert weiter

$$u_n' = F(x, u_1, \cdots, u_n).$$

Sind die Funktionen $F_i, i = 1, ..., n$ linear bezüglich ihre Variablen, so heißt das System auch *linear.* Allgemein sieht es folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{l} u_1' = \sum_{i=1}^n p_{i,1}(t)u_i(t) + g_1(t), \\ u_2' = \sum_{i=1}^n p_{i,2}(t)u_i(t) + g_2(t), \\ \dots \\ u_n' = \sum_{i=1}^n p_{i,n}(t)u_i(t) + g_n(t). \end{array} \tag{4}$$

Der Existenzsatz lautet:

Satz 2: *Sind alle $p_{i,j}$, $g_i \in C'[t_0 - H, t_0 + H]$ 1so existiert ein Intervall $[t_0 - h, t_0 + h], h \leq H$ derart, daß das Anfangswertproblem bestimmt durch (4) und (2) eindeutig løsbar ist.*

Sind $g_i, i = 1, ..., n$ alle gleich Null, so heisst das System *homogen,* sonsz ist es *nichthomogen.*

Literaturverzeichnis;

1. W. E. Boyce, R, C. DiPrima, Introduction to differential equations, Rensselaer Polytechnic Institute, 1970.