FDIBA **TU-SOFIA** **Informatik**

FESTSTELLUNGSPRÜFUNG

WS 2010 Name:
Januar 2011 Immatrikulationsnummer:

Aufgabe 1: Sei in R^2 die Funktion $\mathbf{F}(X)$ vorgegeben, wobei $\mathbf{F}(X) := |x|,\ X := (x, y)^T$.

a) Prägt die Funktion $F(X)$ eine NOrm? 3 P

b) Skizzieren Sie die Menge $\mathbf{F}(X) > 2, xy > 0$. 3 P

Aufgabe 2: Sei die Differentialgleichung

$$\mathbb{D}(u) := 0$$

vorgegeben, wobei

$$\mathbb{D}[u] := u^{(4)} + u.$$

a) Zeigen Sie, ohne die Gleichung zuvor zu lösen, dass das Anfangswertproblem

$$u^{(k)}(0) = 0,\ k = 0, 1, 2, 3$$

nur die trivielle Lösung $u(x) \equiv 0$ besitzt. 6 P.

b) Schreiben Sie die allgemeine Lösung der Gleichung auf. 5 P.

Aufgabe 3: Sei die Differentialgleichung

$$\mathbb{D}(u) := \ln x,\ x > 0$$

vorgegeben, wobei

$$\mathbb{D}[u] := x^3 u^{(3)}(x) + x^2 u^{(2)}(x) - 2xu^{'}(x) + 2u(x).$$

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem 5P

$$\begin{aligned} u(1) &= 0, \\ u(2) &= 0, \\ u(1/e) &= 1 \end{aligned}$$

und das Anfangswertproblem 3P

b)

$$\begin{aligned} u(1) &= 0, \\ u(0) &= 0, \\ u(1/e) &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 4: Berechnen Sie durch Anwendung der Methode von Lagrange die Extremalwerte der Funktion

$$f(x_1, \cdots, x_n) := (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{1/n}$$

auf der Menge $\sum_{i=1}^{n} x_l = 1$. 5P

Aufgabe 5: Sei die Differentialgleichung

$$u^{(2)}(x) - u(x) = 1,$$

vorgegeben.

a) Löse, durch Anwendung der Potenzreihenmethode das Anfangswertproblem $u(0) = u^{(1)}(0) = 1$. 5P.

b) Bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe. 5P.

Berechnungsformel: $\textbf{Note} = 2 + \frac{\textbf{Punktenanzahl}}{10}$;

die Formel ist gültig bei Vorlage mindesens einer gelösten Aufgabe.

FDIBA TU-SOFIA ALLGEMEINER MASCHINENBAU

FESTSTELLUNGSPRÜFUNG

WS 2010 Name:
Januar 2011 Immatrikulationsnummer:

Aufgabe 1: Sei in R^2 die Funktion $\mathbf{F}(X)$ vorgegeben, $\mathbf{F}(X) := 2|x| + 3|y|$, $X := (x, y)^T$.
a) Beweisen Sie, dass $\mathbf{F}(X)$ eine Norm in R^2 definiert. 5 P.
b) Skizzieren Sie die Menge $3 > \mathbf{F}(X) > 2, xy > 0$. 5 P.

Aufgabe 2: Vorgegeben sei die Differentialform

$$(u^2 + xu)dx - x^2 du = 0.$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $\mu(x, u) = (xu^2)^{-1}$ ein Eulerscher Multilpikator der Gleichung $x^2 u'(x) = u^2 + xu$ ist. 4P.
b) Lösen Sie daraufhin in impliziter Form die Differentialgleichung

$$x^2 u'(x) = u^2 + xu$$

unter den Anfangswertbedingungen $u(1) = 1$. 4 P

Aufgabe 4: Durch Anwendung der Methode von Lagrange soll ein Punkt (x, y, z), der im ersten Oktant und auf der Fläche $S : xyz^2 = 32$ liegt, bestimmt werden, so dass sein Abstand zum Nullpunkt der kleinste unter allen Punkten $P \in S$ ist. Geben Sie den Abstand explizit an. 9 P.

Aufgabe 5: Sei die Differentialgleichung

$$\mathbb{D}[u] := e^x$$

vorgegeben, wobei

$$\mathbb{D}[u] := xu^{(1)}(x) + u(x).$$

a) Löse, durch Anwendung der Potenzreihenmethode, numerisch die Gleichung, für $u(0) = 1$. 4P.
b) Bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe. 3 P.
c) Hat das Anfangswertproblem $\mathbb{D}[u] := xu^{(1)}(x) + u(x) = e^x$, $u(0) = 0$ eine Lösung? Begründe die Antwort. 3 P.
Hinweis: Wende die Zerlegung $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ an.

Aufgabe 6: Sei das Differentialgleichungssystem

$$u'(X) = \mathcal{A}u(X)$$

vorgegeben, wobei

$$u(X) : R^3 \longrightarrow R^3, X := (x, y, z)^T,$$

und

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 3, & 2, & 4 \\ 2, & 0, & 2, \\ 4, & 2, & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Die Matrix hat genau drei linear unabhaengige Eigenvektoren. Begründen Sie diese Behauptung ohne direkte Berechnungen. 3 P.
b) Lösen Sie numerisch das System; 4 P.
c) Begründen Sie den Lösungsweg. 4 P.

Berechnungsformel: Note $= 2 + \frac{\textbf{Punktenanzahl}}{12}$;

die Formel ist gültig unter Vorlage mindesens einer gelösten Aufgabe.