ТЕОРИЯ на ПОТЕНЦИАЛА

Източник на изложените лекции са следните монографии:
T. Ransford, Potential theory,
E. Saff, V. Totik, Logarithmic potentials with external fields, Springer Verlag, Berli, 1997.
M. Tzuji, Potential Theory in Modern Functional Analysis, Maruzen, Tokyo, 1959
E. B. Saff, A. D. Sneider, Fundamentals of complex analysis for mathematics, science and engeneering, 1993, A paramount Communication Company, Englewood Cliffs, New Jersey 07632

1. Хармонични функции

(Предварителни познания: Топология върху Гаусовата равнина, уравнения на Коши-Риман, теорема на Коши и интегрална формула на Коши)

Definition: *Нека $\mathfrak{D}$ е област в Гаусовата равнина и $h(z)$ е функция, дефинирана в $\mathfrak{D}, h \in C^2(\mathfrak{D})$. Функцията $h(z)$ е хармонична в точката $z_0 \in \mathfrak{D}$ ако в околност на z_0 е в сила равенството $h_{xx}(z) + h_{yy}(z) = 0$. Функцията $h(z)$ е хармонична в областта $\mathfrak{D}$пишем $h \in \mathcal{H}(\mathfrak{D})$ ако е хармонична във всяка нейна точка. Изразът*

$$\Delta(h) := h_{x,x}(z) + h_{y,y}(z)$$

се нарича Лапласиан на h.
Теорема 1.1.*Нека* $\mathfrak{D}$ **е област в C** и функцията $f(z) = h(z) + ik(z)$ *е аналитична в*$\mathfrak{D}(f \in \mathcal{A}(\mathfrak{D}))$. *Тогава* $h \in \mathcal{H}(\mathfrak{D})$.
Доказателство: Твърдението следва от уравненията на Коши - Риман. Действително, поради аналитичността

$$h_x = k_y,\, h_y = -k_x.$$

Сега е необходимо само да диференцираме съответно по променливите x, y и да използваме факта, че поради непрекъснатостта на частните производни от втори ред (теорема на Weierstraß) $k_{xy} = k_{yx}$.
Q.E.D.

Теорема 1.2. *Нека $\mathfrak{D}$ е едносвързана област в* $\mathbf{C}$ *и функцията* $h(z)$ *е хармонична в* $\mathfrak{D}$*. Тогава съществува функция* f *такава, че*

$$\mathrm{Re} f = h.$$

Функцията f *е единствена с точност до адитивна константа.*

Доказателство: Нека $\tilde{f}$ е функция, удовлетворяваща твърдението на теоремата, т.е. $\mathrm{Re}\ (\tilde{f}) = h(z)$. Тогава, както знаем,

$$\tilde{f}'(z) = \mathrm{Re}\ (\tilde{f})_x - i\mathrm{Re}\ (\tilde{f})_y = h_x - ih_y. \tag{1}$$

Дясната страна е функция, дефинирана навсякъде в $\mathfrak{D}$. Ясно е оттук, че функцията $\tilde{f}$ е единствена с точност до константа (в случая имагинерно число).

Фиксираме $z_0 \in \mathfrak{D}$ и въвеждаме функциите

$$g(z) := h_x(z) - ih_y(z),$$

$$F(z) := \int_{z_0}^{z} g(w)dw + h(z_0).$$

По теоремата на Коши за едносвързани области функцията $F(z)$ е еднозначно определена и аналитична в разглежданата област. Имаме по-нататък

$$F'(z) = \left(\begin{array}{c} g(z) = h_x(z) - ih_y(z) \\ (\mathrm{Re}\tilde{F})_x - i(\mathrm{Re}\tilde{F})_y. \end{array} \right.$$

Следователно

$$h_x(z) - (\mathrm{Re} F)_x = 0,\ h_y(z) - (\mathrm{Re} F)_y = 0,$$

което означава, че аналитичната функция, да кажем функцията H от Теорема 1.1 с реална част $h - \mathrm{Re} F$ е тъждествена константа. От интегралното представяне имаме

$$\mathrm{Re} H(z_0) = 0,$$

или

$$h(z) \equiv \mathrm{Re} F(z).$$

Q.E.D.

Следствие 1.3. *Ако $\mathfrak{D}$ е едновврзана област в* $\mathbf{C}$, $f \in \mathcal{A}(\mathfrak{D})$ *и* $f(z) \neq 0, z \in \mathfrak{D}$, *то съществува функция* $g \in \mathcal{A}(\mathfrak{D})$*такава, че с точност до мултипликативна константа* $f(z) = Ce^{g(z)}$.

Доказателство: Функцията $h(z) := \ln|f(z)|$ е дефинирана навсякъде в $\mathfrak{D}$. Освен това $h \in \mathcal{H}(\mathfrak{D})$. Да означим с $F(z)$ функцията от Теорема 1.2, $F \in \mathcal{A}(\mathfrak{D})$, $\mathrm{Re}F = h$. Но тогава и $g(z) := e^F \in \mathcal{A}(\mathfrak{D})$. Да разгледаме сега функцията $G(z) := \frac{g(z)}{f(z)}$. Виждаме, че $G \in \mathcal{A}(\mathfrak{D})$, както и че $|G| = \frac{|e^F|}{|f|} = 1$ навсякъде в $\mathfrak{D}$.По принципа за max на аналитичните функции тогава $f \equiv Ce^g$*като* $|C| = 1$. **Q.E.D.**

Забележка 1: Условието за едносвързаност е съществено. В това ни убеждава примерът на функцията $f(z) = \frac{1}{z}$ в областта $\{z, |z| \leq 1\} - 0$.

Забележка 2: Всяка хармонична функция е локално равна на реалната част на аналитична функция.

Теорема 1.4.(теорема за средните стойности за хармоничните функции) *Нека* $h \in \mathcal{H}(\{z, |z-a| \leq \rho.\})$ *Тогава за всяко* $r \leq \rho$ *е вярна формулата*

$$h(a) = \frac{1}{2\pi} \oint h(a + re^{i\Theta}) d\Theta.$$

Доказателство: Нека f е аналитична функция, такава, че $\mathrm{Re}f = h$. По-нанатък доказателството следва веднага от интегралната формула на Коши, приложено за f, т.е.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta$$

Досега свойството хармоничност бе дефинирано само в крайни точки на комплексната равнина. Следващата дефиниция позвол ява да говорим и за хармоничност в безкрайно отдалечената точка.

Definition: *Нека функцията* f *е дефинирана в областта* $U, \infty \in U$ *и нека* ϕ *е някакво конформно изображение на* U *върху крайната област* D. *Казваме, че* f*е хармонична в* U, *ако функцичта* $f(\phi^{-1})$ *е хармонична в* D.

ПРЕДОСТАВЯМЕ НА ЧИТАТЕЛЯ ДА ПРОВЕРИ, ЧЕ ИЗБОРЪТ НА ФУНКЦИЯТА ϕ НЕ Е СЪщЕСТВЕН.

Теорема 1.5.- Принцип за Максимума на хармоничните функции. *Нека* $h \in \mathcal{H}(\overline{D})$. *Тогава* h *достига своя максимум във вътрешна точка на областта, освен ако не е тъждествена константа.*

Доказателство: Следва от теоремата за средните стојности - (Th.1.4.)

Теорема 1.6.- Обобшен принцип за Максимума на хармоничните функции. *Нека* $h \in \mathcal{H}(D) \bigcap C(\overline{D})$ *и нека* $h(\zeta) \leq 0, \zeta \in \partial D$. *Тогава за всяко* [1]$z \in D$

$$h(z) \leq 0.$$

Доказателство: Да допуснем, че за някаква точка $z_0 \in \overline{D}$, $h(z_0) > 0$. Очевидно z_0 ще е вътрешн а за областта D. От съображения за непрекъснатост, обаче, съществува достатъчно близък до ∂D контур γ такъв, че

$$h(z) < h(z_0), z \in \gamma$$

Последното е невъзможно според принципа за максимума, освен ако функцията h не е тъждествена константа. **Q.E.D.**

Ще приключим този параграф със следната

Теорема 1.7.- Теорема за единственост на хармоничните функции. Нека D е област в $\mathbf{C}$ и $h \in \mathcal{H}(D)$. *Нека осен това сществува отворено подмножество*U *на* D, такова, че

$$h(z) = 0$$

навсякъде в U. *Тогава*

$$h \equiv 0$$

навсякъде в D.

Доказателство: Без да нарушаваме общността на разглежданията ще считаме, че U е едносвързано. Да означим с f функцията с $f \in \mathcal{A}(U)$, $\mathrm{Re} f(z) = h(z)$, $z \in U$ (вж Th.1.2.) Ше имаме $\mathrm{Re} f(z) = 0$, $z \in U$, с което

$$f(z) = Const, \text{ като } \mathrm{Re} Const = 0$$

навсякъде в D. С това твърдението е доказано. **Q.E.D.**

[1] Теоремата е доказана при по-общите условия $h \in \mathcal{H}(D)$ и $\limsup_{z \to \zeta} h(z) \leq 0$, $\zeta \in \partial D$

Exercises:

1. Нека D е област в $\mathbf{C}$ и $f, g \in \mathcal{H}(D)$. Докавете, че $fg \in \mathcal{H}(D)$ тогава и само тогава, когато $h(z)+ick(z) \in \mathcal{A}(D)$ за някаква константа c.

2. Нека G е област в $\mathbf{C}$, $f \in \mathcal{A}(G)$, като $f : G \longrightarrow D$ и $h \in \mathcal{H}(D)$. Докажете, че $h \circ f \in \mathcal{H}(G)$.

3.Покажете, че ако D е област и $f \in \mathcal{A}(D)$, като при това $f(z) \neq 0, z \in D$, то $|f(z)| \in \mathcal{A}(D)$.