10. Теория на Резидуумите

Нека Γ е гладка затворена крива и функцията f е аналитична във вътрешността на Γ с изключение на точката $z = a$, в която има изолирана особеност, и непрекъсната "по продължимост до "Γ". Както знаем , f се развива в ред на Лоран

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (z-a)^j, \tag{1}$$

и този ред е сходящ в подходяща околност на $z = a$.

Definition: Коефициентът a_1 пред степента $\frac{1}{z-a}$ в Лорановото развитие (1) се нарича *резидуум* на f в точката $z = a$ и се бележи с $\operatorname{Res}\,(f; a)$ или с $\operatorname{Res} f(a)$.

Да разгледаме проблема за пресмятането на интеграла

$$\oint_\Gamma f(z)dz^1$$

По определение Γ е положително ориентирана спрямо вътрешността си. По интегралната теорема на Коши имаме

$$\oint_\Gamma f(z)dz = \oint_C f(z)dz, \tag{2}$$

като C е окръжност с център в точката $z = a$ и достатъчно малък радиус (интегрира се в положителна посока). Заместването на f в дясната страна с нейния Лоранов ред (1) води до равенството

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 2\pi i a_1,$$

или, с оглед на дефиницията, до представянето

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}\,(f; a). \tag{3}$$

[1] *Да напомним, че при този запис интегрирането се провежда веднаж в положителна, т.е. обратна на часовниковата стрелка посока.*

Нека сега f има краен брой изолирани особености a_1, ..., a_k в областта $\mathcal{D}$ с граница Γ. Нека, по-нататък, $C_i, i = 1, ...k$ са две по две непресичащи се окръжности в $\mathcal{D}$ с центрове съответно точките $a_i, i = 1, ...k$ От теоремата на Коши

$$\oint_\Gamma f(z)dz = \sum_{i=1}^{k} \oint_{C_i} f(z)dz.$$

Замествайки с (3), получаваме окончателно

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} \text{ Res } (f; a_i).$$

Полученото равенство се нарича **Теорема за Резидуумите.** С оглед на пълнотата на изложението ще я формулираме отделно

Теорема 10.1: Нека функцията f е аналитична в областта $\mathcal{D}$ с изключение на краен брой точки a_i, $i = 1, \cdots, k$ в които има изолирани особености и нека f е непрекъсната върху границата на областта Γ. Тогава

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} \text{ Res } (f; a_i)$$

Пресмятане на Резидуумите

Универсална рецепта за пресмятане на резидуумите няма. В някои случаи, когато особеността а функцията е полюс, като следствие от интегралната теорема на Коши се получават удобни за работа формули.

Нека f има полюс от кратност m в точката $z = a$. Тогава

$$\text{Res } (f; a) = \lim_{z \to a} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)]. \qquad (4)$$

Доказателство: Действително, да започнем с Лорановия ред (1)

$$f(z) = \sum_{i=1}^{m} a_{-i} \frac{1}{(z-a)^i} + \sum_{i=0}^{\infty} a_i (z-a)^i.$$

Умножаваме с $(z-a)^m$, диференцираме $m-1$ пъти и получаваме

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-a)^m f(z)] = (m-1)!a_{-1} + m!a_0(z-a) + \frac{(m+1)!}{2}a_1(z-a)^2 + \cdots,$$

откъдето

$$\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-a)^m f(z)] = (m-1)!a_{-1} + 0$$

Q.E.D.

В горните условия за функцията е валидно, както знаем, представянето $f(z) = \frac{F(z)}{(z-a)}$, $F-$ аналитична в подходяща околност и $F(a) \neq 0$ (вж. Th.9.4). Тогава

$$\text{Res }(f;a) = \frac{1}{(m-1)!}F^{(m-1)}(a). \tag{5}$$

Доказателство: От (3) получаваме представянето

$$f(z) = \frac{a_{-m} + a_{-m+1}(z-a) + \cdots + a_{-1}(z-a)^{m-1} + a_0(z-a)^m + \cdots}{(z-a)^m},\ a_{-m} \neq 0,$$

така че

$$F(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-a) + \cdots + a_{-1}(z-a)^{m-1} + a_0(z-a)^m + \cdots,\ a_{-m} \neq 0. \tag{6}$$

Както знаем,

$$F^{(m-1)}(a) = (m-1)!\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_i}\frac{F(\zeta)}{(z-a)^m},$$

което, сравнено с (6), дава искания резултат.

Пример: Пресметнете резидуумите на особеностите на функцията

$$\frac{\cos z}{z^2(z-\pi)^3}.$$

11. ПРИЛОЖЕНИЕ НА ТЕОРЕМАТА ЗА РЕЗИДУУМИТЕ

Теорема на Руше, Принцип на Аргумента и Теорема на Хурвиц

Нека функцията f е аналитична върху кръга $D_a(r)$ с изключение на точката $z = a$, в която има полюс. Да означим с m кратността му. Както знаем тогава, в голяма околност на $z = a$ за f е в сила представянето

$$f(z) = \frac{F(z)}{(z-a)^m} \tag{7}$$

, като функцията е аналитична в и $F(a) \neq 0$. Без да нарушаваме общността ще считаме, че навсякъде върху $\overline{D}_a(r)$ функцията F е различна от нула. Тогава изразът $\frac{f\prime}{f}$ ще бъде функция, аналитична в $D_a(r)$ с изключение на $z = a$, където има прост полюс от кратност m. Действително, това следва от горното представяне на f в споменатата околност $D_a(r)$:

$$\frac{f\prime}{f} = \frac{F\prime(z)(z-a) - mF(z)}{(z-a)}.$$

Лесно съобразяваме, че $F\prime(z)(z-a) - mF(z)$ е фукция, аналитина в споменатия кръг и различна от 0 в точката $z = a$. По теоремата за резидуумите ще имаме тогава

$$\oint_{C_a(r)} \frac{f\prime}{f} dz = -m2\pi i \tag{8}$$

Нека сега f е аналитична в околност на точката $z = b$ и нека $z = b$ е единствената нула в кръга. Знаем, че тогава f може да се представи (аналогично на (7)) във вида

$$f(z) = F(z)(z-b)^n.$$

Повтаряйки същите разсъждения, виждаме, че $z = b$ е прост полюс и че

$$\oint_{C_a(r)} \frac{f\prime}{f} dz = n2\pi i, \tag{9}$$

където n е кратността на нулата. Ако $\mathcal{D}$ е област в $\mathbb{C}$ и f е аналитична в $\mathcal{D} \setminus \bigcup_{i=1}^{m} a_i$, то за да пресметнем $\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f\prime}{f}, \Gamma := \partial\mathcal{D}$, ще ползваме (8) и (9). Така стигаме до теоремата

Теорема 10.1: Нека функцията f е аналитична в областта $\mathcal{D}$ с изключение на краен брой точки $a_i, i = 1, \cdots, p$ където има полюси съответно от кратности m_i. Нека f е непрекъсната и различна от нула върху границата $\Gamma := \partial\mathcal{D}$ и има нули в точките $b_j, j = 1, \cdots q$ от кратности съответно n_j. Тогава

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f\prime(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^{q} n_j - \sum_{i=1}^{p} m_i.$$

От тази теорема получаваме теоремата на Хурвиц (Hurwitz), която има важни приложения.

Теорема 10.2,(Хурвиц) : Нека $\{f_n\}$ е безкрайна редица от аналитични върху областта $\mathcal{D}$ функции, клонящи равномерно към функцията f. Тогава, за всяко n достатъчно голямо функцията f_n се анулира толкова пъти в областта $\mathcal{D}$,[2] колкото и функцията f.

Доказателство: Действително, без да нарушаваме общността ще считаме, че $f \neq 0$ on $\Gamma := \partial\mathcal{D}$. Тогава и всяка функция f_n ще бъде различна от нула върху кривата Γ, стига n да е достатъчно голямо. От друга страна, равномерната сходимост гарантира, че

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} dz \to \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} dz.$$

Дясната страна е равна по Th 10.1 на броя на нулите на f в областта $\mathcal{D}$, а левите интеграли, пак по същата теорема, се равняват на броя на нулите на f_n. Тъй като в последната релация участват само цели числа, то твърдението е очевидно. **Q.E.D.**

Ще обърнем внимание на следното:

$$\oint_\Gamma \frac{f\prime(z)}{f(z)} dz = \oint_\Gamma \frac{df(z)}{f(z)} = \oint_\Gamma d\{\log f(z)\},$$

като за определеност взимаме главния клон на $\log -$ функцията. Тъй като кривата Γ е затворена, а $\mathrm{Log} f(z) = \ln |f(z)| + i \ \mathrm{Arg}\ f(z)$, то дясната

[2] *Нулите се броят с отчитане на техните кратности.*

страна изразява пълното изменение на аргумента на $f(z)$, когато опише кривата Г. С други думи,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f\prime(z)}{f(z)}dz = \Delta_{z\in\Gamma}\mathrm{Arg}(f(z)).$$

Последното равенство дава на Th.10.1 името "Принцип на аргумента."Проста геометрична интерпретация на този принцип е теоремата на Руше (Rouche), именно:

Теорема 10.3, Руше : Нека $\mathcal{D}$ е област с граница Γ и функциитеf, F са аналитични върху областта, като $0 < |f(z)| < |F(z)|$. Тогава броят на нулите на $F - f$ в $\mathcal{D}$ е равен на този на функцията F.

Обърнете внимание, че в условието на теоремата на Руше участва само информация за двете функции върху границата на областта.

Exercises:

1. Докажете Th.10.3.

2. Докажете, като ползвате теоремата на Rouche, че всеки полином от степен n има точно n нули в комплексната равнина $\mathbb{C}$ (нулите се броят с отчитане на кратностите им).♣

а) Докажете,че функцията $f(z) = e^z + 3z + 1$ има точно една нула в лявата полуравнина.♣

3. Без да пресмятате интеграла

$$\oint_{C_0(2)}\frac{(e^z - 1)}{z^2(z+1)(z-3)}dz$$

определете стойността му.♣