Следствия от Интегралната теорема на Cauchy-продължение

В началото ще формулираме теорема, обратна на теоремата на Коши, т.н. **Теорема на Морера**:

Теорема 7.7 : *Нека $\mathcal{D}$ е едносвързана област и $f \in C(\overline{\mathcal{D}})$. Тогава $f \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$, ако върху всеки затворен контур $\gamma \subset \mathcal{A}(\mathcal{D})$ е вярно, че*

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0.$$

Доказателството няма да привеждаме. Оставяме на читателя да проведе сравнението между двата резултата.

Теорема 7.8 : *Нека редицата $\{f_n\}$ от аналитични в областта $\mathcal{D}$ функции клони равномерно към f върху компактни подмножества на $\mathcal{D}$*[1]*. Тогава $f \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$.*

Доказателство: Нека е произволно компактно подмножество на $\mathcal{D}$. От Th2.2 следва, че $f \in C(K)$. Изчерпвайки областта $\mathcal{D}$ чрез компактни подмножества[2], стигаме до извода, че $f \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$.

Нека γ е гладка крива, съдържаща се в $\mathcal{D}$. От теоремата на Коши имаме $\int_\gamma f_n(z)dz = 0$ за всяко число $n \in \mathbb{N}$. От друга страна, от непрекъснатостта на f в цялата област следва съществуването на $\int_\gamma f(z)dz$, а от равномерната сходимост на редицата $\{f_n\}$ към f - и това, че

$$\int_\gamma f_n(z)dz \to \int_\gamma f(z)dz.$$

Сега равенството

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

е очевидно.

Но според теоремата на Морера тогава и $f \in \mathcal{A}(\mathcal{B})$. **Q.E.D.**

[1] *казваме, че сходимостта е локално равномерна в $\mathcal{D}$ или че редицата $\{f_n\}$ клони към f локално равномерно в областта $\mathcal{D}$*

[2] *т.е., въвеждайки безкрайна редица от компактни множества $\{K_n\}$, $K_n \subset K^o_{n+1} \subset \cdots \mathcal{D}$*

8. Разлагане на аналитичните функции в ред на Taylor

Ще започнем с повторението на някои познати факти от теорията на безкрайните редове с неотрицателни коефициенти, както и на безкрайните степенни редове.

Definition: Безкраен степенен ред

$$S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, a,\ c_i, i = 0, 1, \cdots, -\text{fixed},\ z \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Както знаем,

$$S(z) := \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} c_n (z-a)^n. \tag{2}$$

Ако съществува тази граница, казваме, че редът е сходящ и пишем

$$S(z) < \infty.$$

Да обърнем внимание, че всъщност става дума за сходимост на редица по полиноми. Редът се нарича *абсолютно сходящ*, ако

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n||z-a|^n < \infty$$

и равномерно сходящ, ако сходимостта в (1) е равномерна. Сумата

$$S_k(z) := \sum_{n=0}^{k} c_n (z-a)^n$$

се нарича $k-$тата парциална сума на реда (1).

Ще припомним някои известни факти.

Теорема 8.1: *Нека* $S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ *е абсолютно сходящ в точката* z_0. *Тогава той е сходящ в регулярен смисъл в същата точка.*

Доказателство: Действително, нека $\varepsilon > 0$ е произволно число. От абсолютната сходимост на реда в z_0 имаме следва, че

$$|\sum_0^{k+m} |c_n||z_0 - a|^n - \sum_0^{k} |c_n||z_0 - a|^n| \leq \varepsilon$$

всеки път, когато k е достатъчно голямо и $m \in \mathbb{N}$. Последното неравенство осигурява и

$$|S_{k+m}(z_0) - S_k(z_0)| \leq \varepsilon, k \geq k_0, m \in \mathbb{N}.$$

Твърдението следва сега от фундаменталната теорема на Коши.[3] **Q.E.D.**

Теорема 8.2: *Нека* $S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *в сходящ в точката* z_0. *Тогава* $c_n(z_0 - a)^n \to 0, n \to \infty$.

Доказателство: Твърдението следва от сходимостта на реда в точката z_0; имаме

$$S_k(z_0) - S_{k-1}(z_0) = c_k(z-a)^k \to 0,\ k \to \infty.$$

Q.E.D.

Теорема 8.3, Теорема на Абел : *Нека редът* $S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *е сходящ в точката* z_0. *Тогава той е абсолютно сходящ за всяко* z, *такова че* $|z - a| < |z_0 - a|$.

Доказателство: Нека $|z-a| < |z_0-a|$. Ще докажем, че редът е абсолютно сходящ в z. По-нататък твърдението следва от Th 8.1. Именно,фиксираме произволно положително число ε; от предишната теорема знаем, че

$$|c_k(z-a)^k| \leq \varepsilon$$

всеки път, когато $n \geq n_0$. Тогава

$$\sum_0^{\infty} |c_n||z-a|^n = \sum_0^{\infty} |c_n| \frac{|z-a|^n}{|z_0-a|^n} |z_0 - a|^n \leq$$

[3] Фундаментална теорема на Коши: *Редицата от реални числа* $\{a_n\}$ *е сходяща тогава и само тогава, когато за всяко* $\varepsilon > 0$ *съществува число* n_0 *такова, че* $|a_{n+m} - a_n| \leq \varepsilon$ *всеки път, когато* $n > n_0$, *а* m *е произволно естествено число.*

$$\sum_0^{n_0} |c_n| \frac{|z-a|^n}{|z_0-a|^n} |z_0-a|^n + \sum_{n_{0+1}}^{\infty} |c_n| |z_0-a|^n \frac{|z-a|^n}{|z_0-a|^n}$$
$$\leq \sum_0^{n_0} |c_n| \frac{|z-a|^n}{|z_0-a|^n} |z_0-a|^n + \sum_{n_{0+1}}^{\infty} \varepsilon \frac{|z-a|^n}{|z_0-a|^n},$$

което от своя страна е сходяща геометрична прогресия[4]. С това доказателството е завършено. **Q.E.D.**

От Теоремата на Абел получаваме

Следствие 8.4: *Нека редът $S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ е разходящ в точката z_0. Тогава той е разходящ за всяко z, такова че $|z-a| > |z_0-a|$.*

Доказателството предоставяме на читателя.

И така, по естествен път стигаме до следната

Definition: Радиус на сходимост R на степенен ред: Даден е безкрайният степенен ред $S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$. Радиус на сходимост $R := \sup\{\rho, S(z) < \infty$ за $|z| < \rho\}$.

От теоремата на Абел следва, че степенният ред е сходящ в кръга $D_a(R)$ и разходящ извън този кръг.

Теорема 8.4 *Формула на H'Adamard:*

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n}}.$$

Доказателство: Действително, нека $\rho < R$. Ще покажем, че редът е равномерно сходящ върху кръга $D_a(\rho)$.

За целта фиксираме числото $\varepsilon > 0$ по такъв начин, че $\rho + \varepsilon < R$. От дефиницията за радиуса на сходимост произтича по-нататък оценката

$$|c_n| \leq \frac{1}{(R-\varepsilon)^n}$$

[4] За краткост пишем

$$\sum_0^{\infty} |c_n||z-a|^n \leq\leq \sum_0^{\infty} \varepsilon \frac{|z-a|^n}{|z_0-a|^n}$$

всеки път, когато $n > n_0$. И така, нека $|z-a| \le \rho$. Тогава

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n||z-a|^n = \sum_{n=0}^{n=n_0} |c_n||z-a|^n + \sum_{n=n_0}^{\infty} |c_n||z-a|^n <$$

$$\sum_{n=0}^{n=n_0} |c_n||z-a|^n + \sum_{n=n_0}^{\infty} (\frac{\rho}{R-\varepsilon})^n,$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n||z-a|^n << \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{\rho}{R-\varepsilon})^n.$$

Но стоящият вдясно ред е сходящ (поради избора на $\varepsilon-$ геометрична прогресия с общ член < 1.) Следователно редът $S(z)$ е абсолютно сходящ, а по Th.8.1 - и сходящ в регулярен смисъл.
Забележка: Обърнете внимание, че горното твърдение не съдържа никаква информация за сходимостта на степенният ред върху окръжността $C_a(R)$.

Теорема 8.5 *Нека редът $S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ има положителен радиус на сходимост R. Тогава той е абсолютно и равномерно сходящ във вътрешността на кръга $D_a(R)$ и $S \in \mathcal{A}(D_a(R))$.*

Доказателство: Фиксираме число $\rho < R$. От предишната теорема знаем, че редът е абсолютно сходящ, т.е.,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|\rho^n < \infty.$$

Имаме по-нататък

$$\|S_{n+m} - S_n\|_{\overline{D_a(\rho)}} = \| \sum_{k=n+1}^{n+m} c_k(z-a)^k \| \le \sum_{k=n+1}^{n+m} |c_k|\rho^k.$$

От фундаменталната теорема на Коши следва, че лявата страна е произволно малка, стига n да е достатъчно голямо. Но тогава същото важи и за $\|S_{n+m} - S_n\|_{\overline{D_a(\rho)}}$, което доказва равномерната сходимост на редицата от парциалните суми върху кръга $\overline{D_a(\rho)}$. Твърдението следва от Th.7.8.

Теорема 8.6, Теорема на Тайлър *Нека* $f \in \mathcal{A}(\overline{\mathcal{D}}_a(\rho)), \rho > 0, a \in \mathbb{C}$. *Тогава* f *се разлага в безкраен ред на Тейлър* $\sum_{c_n}^{(z-a)^n}$, *абсолютно и равномерно сходящ във вътрешността на кръга* $\mathcal{D}_a(\rho)$; $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_a(\rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta$.

Доказателство: От интегралната формула на Коши имаме

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_a(\rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,\ z \in \mathcal{D}_a(\rho).$$

Припомняме си, че $|z-a| < |\zeta - a|$. Това ни дава право да запишем дясната част във вида

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_a(\rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a) - (z-a)} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_a(\rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{z-a}{\zeta-a})^n.$$

Прилагайки познати теореми, получаваме окончателно

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \frac{1}{2\pi i}\int_{C_a(\rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a)^{n+1}} d\zeta.$$

Полученият ред се нарича "ред на Тейлър", а самото представяне на функцията f в такъв ред - "разлагане на f в безкраен ред на Taylor".