9.нули и изолирани особености на аналитични функции

Нека функцията f е аналитична в околност на точката $z = a$ и нека

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{1}$$

е нейното развитие в ред на Taylor около $z = a$. Да напомним, че

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta,$$

като интегрирането се провежда по произволна окръжност с център в точката a и достатъчно голям радиус. Да предположим, че $f(z)$ се анулира в точката $z = a$. Тогава $c_0 (= f(a)) = 0$, така че (1) приема вида

$$f(z) = (z-a) \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^{n-1} := (z-a)\phi_1(z).$$

Очевидно редът $\phi_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^{n-1}$ е сходящ и има същия радиус на сходимост, както и $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$. Вторият ред ϕ_1 също така би могъл да е равен на нула при $z = a$, т.е. $c_1 = 0$. Тогава f ще приеме вида

$$f(z) = (z-a)^2 \sum_{n=2}^{\infty} c_n (z-a)^{n-2} := (z-a)^2 \phi_2(z).$$

Този процес продължава дотогава, докато стигнем до някое $c_m \neq 0$. Възможно е, разбира се, всички коефициенти $c_n, n = 0, 1, 2, \cdots$ да са равни на нула. Тогава $f \equiv 0$ там, където е сходящ редът (1). Следната дефиниция е завъшва тези разсъждения:

Definition: Казваме, че f има нула в точката $z = a$ от *кратност* m, ако съществува функция ϕ аналитична в околност на $z = a$ и различна от нула навсякъде в тази околност ($\phi(z) \neq 0$), такава, че да е валидно представянето

$$f(z) = (z-a)^m \phi(z).$$

Смисълът на тази дефиниция е, че нулите на една аналитична функция са "изолирани"една спрямо друга, освен ако самата функция не е тъждествена нула. Ще докажем следната теорема:

Теорема 9.1 : *Нека f е аналитична в околност $\mathcal{U}$ на точката $z = a$. Нека съществува безкрайна редица $\{z_n\}$ от точки, клонящи към a чрез стойности, различни от a и такива че $f(z_n) = 0$ за всяко $n1, 2, \cdots$. При тези предположения $f \equiv 0$.*

Доказателство: Допускаме, че $f \not\equiv 0$. Условието $z_n \to a$ осигурява равенството $f(a) = 0$. От направеното допускане $f \not\equiv 0$ следва, че кратността на нулата ще бъде крайно число. Да я означим с m. По дефиния тогава

$$f(z) = (z - a)^m \phi(z),$$

като ϕ е аналитична в $z = a$ и различна от нула "достатъчно близо"до a. Без да нарушаваме общността на разглежданията ще считаме, че

$$\phi(z) \neq 0, \text{ за всяко } z \in \mathcal{U}. \tag{2}$$

По условие

$$f(z_n) = (z_n - a)^m \phi(z_n) = 0,$$

което, поради $z_n \neq a$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ и поради непрекъснатостта води до

$$\phi(a) = 0.$$

Но полученото равенство противоречи на (2). Следователно направеното допускане не е вярно и $f \equiv 0$.

От Th 9.1 следва т.н.

Принцип за единственост на аналитичните функции: *Нека $\mathcal{D}$ е област в $\mathbb{C}$ и f, $g \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$. Нека $f(z_n) = g(z_n)$ върху безкрайно множество от точки $\{z_n\}$, имащи точка на сгъстяване z_0, лежаща във вътрешността на $\mathcal{D}$. Тогава $f \equiv g$.*

Ред на Лоран и изолирани особености

.

Exercises:

Теорема 9.2 : *Нека f е аналитична в отворения венец $\mathcal{A} := \{0 < |z-a| < R\}$. Тогава тя може да се развие в следния безкраен ред:*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{3}$$

като двата реда са сходящи във венеца и равномерно сходящи във всеки "подвенец"$0 < r_1 \leq |z-a| \leq r_2 < R$. За коефициентите $c_j, j = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ важат формулите

$$c_j = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{j+1}} d\zeta,\ j = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

като интерирането се извършва в положителна посока по всяка окръжност $C = C_a(\rho)$ с $\rho < R$.

Редът (3) се нарича *Ред на Лоран (Laurent)*, първата сума - *главна част на лорановото развитие около точката* , а втората - *регулярна (холоморфна) компонента. Точката $z = a$ е изолирана особеност на f,.*

Доказателство: Нека $z \in \mathcal{A}$ и числата r_1, r_2 са фиксирани по такъв начин, че $0 < r_1 \leq |z-a| \leq r_2 < R$. От теоремата на Коши знаем, че

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta - \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta, C_i := C_a(r_i),\ i = 1, 2.$$

Преобразуваме първия интеграл по познатия от предишния параграф начин, а именно:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a) - (z - a)} d\zeta.$$

След като отчетем, че $|\zeta - a| < |z-a|$, $\zeta \in C_2$, ще стигнем до холоморфната компонента на Лорановия ред. По аналогичен начин, като използваме, че $|\zeta - a| < |z-a|$, $\zeta \in C_1$, стигаме до главната част на (3).

Пример: Намерете Лорановото развитие на $e^{1/z}$ около нулата.

Решение: Знаем, че

$$e^w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$$

за всяко крайно комплексно число w. Полагайки $w = 1/z, z \neq 0$ намираме реда

$$e^{1/z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{}{z^n n!}.$$

Definition: Нека f има изолирана особеност в $z = a$, и (3) е нейното Лораново развитие във $z = a$. Особеността е
отстранима, **ако** $c_j = 0$ **за всяко** $j \in \mathbb{N}$;
полюс от кратност m, **ако** $c_j = 0, j > m$ **и** $c_m \neq 0$;
съществена особеност, **ако** $c_j \neq 0$ **за безкрайна редица от естествени числа.**

Ако f има отстранима особеност в $z = a$, то нейното развитие в ред на Лоран във венеца $\mathcal{A}$ има вида

$$f(z) = \sum a_i (z-a)^i.$$

Пример:

$$\frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!},\ a = 0$$

$$\frac{\cos z - 1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n)!}.$$

Доказателството на следното твърдение оставяме на читателя.

Теорема 9.3 :Нека f има отстранима особеност в $z = a$. Тогава:

f е ограничена в подходяща околност на $z = a$;

$\lim f(z)$ **е краен, когато $z \to a$;**

f може да бъде "додефинирана"като аналитична в точката a.

Следното твърдение също е лесно доказуемо:

Теорема 9.4 :Нека f има полюс в $z = a$ от кратност m. Тогава $|(z-a)^l f(z)| \to \infty$ всеки път, когато $l < m$, а функцията $(z-a)^m f(z)$ има отстранима особеност в $z = a$. В частност, $f(z) \to \infty, z \to a$.

От дефиницията за полюс с лесно получаваме

Теорема 9.5 :Функцията f има полюс в $z = a$ от кратност m тогава и само тогава, когато в достатъчно малка околност на $z = a$ е в сила представянето

$$f(z) = \frac{F(z)}{(z-a)^m}, \tag{4}$$

където функцията F е аналитична в $z = a$ и $F(a) \neq 0$.

Ще обърнем внимание на следната теорема, изразяваща връзка между "нулите"и "полюсите."

Теорема 9.5 : Функцията f има нула в $z = a$ от кратност m тогава и само тогава, когато функцията $1/f$ има полюс от същата кратност в тази точка.

Exercises:

1. Докажете Th.9.5

Развийте в ред на Лоран функцията $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-4)}$

a) около нулата; b) във венеца $2 < |z| < 4$; c) във външността на кръга $D_0(4)$.

Нека f има нула от кратност m в точката $z = a$. Докажете, че $f'(z)$ има нула от кратност $m - 1$. Как ще се модифицира твърдението, ако има полюс от някаква кратност?

Нека f има нула от кратност m в точката $z = a$. Докажете, че $\frac{f'(z)}{f(z)}$ има прост полюс в същата точка.