10. Принцип на аргумента, теореми на Руше и на Харнак,

Продължение

Exercises:

1. Докажете, че функцията

$$f(z) := z^4 + 4z^2 - 1$$

има точно два корена в $D_0(1)$.
Решение: Вырху $C_0(1)$ имаме:

$$|z^4| = 1, \; |4z^2 - 1| \geq 3.$$

И така,

$$|z^4| < |4z^2 - 1| \text{ всеки път, когато} |z| = 1$$

По теоремата на Руше тогава функцията z^4+4z^2-1 ще има толкова нули в единичния кръг, колкото и $4z^2 - 1$ в единичния кръг, т.е. две.

2. Докажете, че функцията

$$f(z) := ze^{\lambda - z} - 1,$$

с $\lambda-$ реално число, $\lambda > 1$, има точно една нула в кръга $D_0(1)$ и тя е реално положително число.
Решение: Първата част следва от теоремата на Руше, приложена спрямо оценките и функциите

Що се отнася до второто твърдение, ще докажем, че разглежданата функция има поне една реална нула в интервала $[-1, 1]$. Действително, върху този интервал функцията е строго растяща, както лесно се проверява. Тъй като в точките тя приема стойности с противоположни знаци, то по теорема на Weierstrass Тък като броят на всички нули в единичния кръг е едно, то тази хула е реално число. тя ще има поне една нула, а според предишното, само една.

3. Нека $f \in \mathcal{A}(D_0(1)) \bigcap C(\overline{D}_0(1))$, като

$$|f(z)| < 1, \text{ за } |z| = 1.$$

a) Докажете, че уравнението

$$f(z) = z$$

има точно един корен в $D_0(1)$.
b) Нека $|z_0| \leq 1$ е фиксирана точка. Докажете, че редицата $\{z_n\}$ дефинирана рекурсивно като $z_n := f(z_{n-1})$, $n = 1, 2, \cdots$ е сходяща и клони към точката $\tilde{z}$, за която $\tilde{z} = f(\tilde{z})$ (т.н." неподвижна точка" на $f(z)$.)

4. Нека $f \in \mathcal{A}(D_0(\rho)) \bigcap C(\overline{D}_0(\rho))$, като $f(z) \neq w_0$ върху окръжността $C_0(\rho)$. Обяснете защо стойността на интеграла

$$\oint_{C_0(\rho)} \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} dz$$

е равна на броя на нулите на уравнението

$$f(z) = w_0$$

във вътрешността на кръга $D_0(\rho)$.

5. Нека D е област в $\mathbf{C}$ и $f \in \mathcal{A}(D) \bigcap C(\overline{D})$, като $f \neq 0$ за $z \in \overline{D}$. Нека $\{f_n\}$ е редица от функции, непрекъснати върху ∂D и мероморфни в областта D.[1] Нека редицата f_n клони при $n \to \infty$ равномерно към функцията f върху границата на областта D. Докажете, че от известен номер нататък всяка функция f_n има в D толкова полюси, колкото и нули.
Hint: Използвайте принципа на аргумента и равномерната сходимост на редицата $\{f_n\}$ върху ∂D.

[1] Ако имат особености в D, то те са полюси.