# 9. Нули и изолирани особености

**Продължение**

Да си припомним Теорема 9.4 : ако функцията $f$ има полюс в точката $z = a$, то $|f(z)| \to \infty$, всеки път, когато $z \to a$. Внимателният читател ще си зададе въпроса дали твърдението е вярно, ако $f$ има съществена особеност в тази точка. Отрицателен отговор дава известната теорема на Пикар

**Theorem 9.7, Picard's theorem:** Нека $f$ *има съществена изолирана особеност в* $z = a$. *Тогава във всяка околност на точката* $z = a$ *функцията* $f$ *приема всяко комплексно значение, с изключение наймного на едно.*

Доказателството на тази теорема ще бъде изложено по- нататък.

Ще илюстрираме теоремата на Пикар в следния пример:
*Exercises:*
1. Проверете верността на теоремата на Пикар за функцията $f(z) = e^{1/z}$ в околност на нулата.
Както знаем, особеността на нулата е изолирана и съществена. Нека $c \neq 0$ е комплексно число, фиксирано по произволен начин. Ще покажем, че уравнението $e^{1/z} = c$ има във всяка околност на нулата безброй много решения. Действително, нека $|z| < \varepsilon$. Уравнението е равносилно на

$$\log c = 1/z,$$

или, както знаем,ı от формулите за логаритмичната фукция

$$1/z = \ln|c| + i \text{ Arg } c + 2k\pi i := w_k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

Когато $|k|$ е достатъчно голямо, то $|\log z| > 1/\varepsilon$ и

$$z = 1/w_k.$$

2. Класифицирайте нулите и особеностите на функцията $f(z) = \sin(1 - z^{-1})$.
Нулите са точките, в които

$$1 - z^{-1} = \pi k, k = \pm 1, \pm 2, \cdots$$

или

$$z = 1/(1 - k\pi).$$

От друга страна, точката $z = 0$ е изолирана особеност. Но, бидейки в същото време точка на сгъстяване на нулите на функцията, тя може да е само съществена особеност на разглежданата функция.

Ще обобщим изложеното до тук в

**Theorem 9.8:** *Ако функцията $f$ има изолирана особеност в точката $z = a$, то са еквивалентни следните твърдения:*

*Особеността е отстранима $\Longleftrightarrow$ $|f(z)|$ е ограничена в околност на $z = a$ $\Longleftrightarrow$ $f(z)$ има граница, когато $z \to a$ $\Longleftrightarrow$ $f$ може да бъде додефинирана като аналитична функция в точката $z = a$.*

*Особеността е полюс $\Longleftrightarrow$ $|f(z)| \to \infty$ когато $z \to a$, $\Longleftrightarrow$ $f(z) = g(z)(z-a)^{-m}$, $g \in \mathcal{A}(a)$, $g(a) \neq 0$ за някакво естествено число $m$.*

*Особеността е съществена $\Longleftrightarrow$ $|f(z)|$ не е ограничена в околност на $z = a$ $\Longleftrightarrow$ $f(z)$ приема във всяка околност на $z = a$ всички комплексни значения с евентуално изключение най -много на едно.*

*Exercises:*

1. Класифицирайте особеностите на

$$\frac{z^3+1}{z^2(z+1)},\ z^3 e^{1/z},\ \frac{1}{e^z - 1}.$$

2. Конструирайте функция, която да има двукратна нула в $z = 0$, полюс от кратност 3 в точката $z = 1$ и изолирана съществена особеност в $z = -1$.

**Решение** :

$$f(z) = \frac{z^2 e^{1/(z+1)}}{(z-1)^3} g(z),$$

като $g(z)$ е цяла функция, $g(0)g(1) \neq 0$.

3. Докажете, че ако $f$ има съществена особеност в $z = a$, то това е вярно и за функцията $e^{f(z)}$.

4. Проверете верността на теоремата на Пикар за функцията $f(z) = \cos 1/z$ в околност на нулата.

5. Кои от твърденията са верни ?

a) Функциите $f, g$ имат полюс от една и съща кратност в точката $z = a. \Longleftrightarrow f + g$ има полюс от същата кратност.
b) $f$ има полюс в $z = a$, а $g$ съществена особеност $\Longrightarrow f + g$ има съществена особеност в $z = a$.
c) $f$ има полюс от кратност $m$ в $z = a, \Longrightarrow f(z^2)$ има полюс от кратност $2m$.
d) $f$ има полюс в $z = a$, а $g-$ съществена особеност $\Longrightarrow f(z)g(z)$ има съществена особеност.
e) $f$ има нула от кратност $m$ в $z = a$, а $g-$ полюс от кратност $n \leq m, \Longrightarrow f(z)g(z)$ има отстранима особеност в $z = a$.

**Hint:** Използвайте развитието в ред на Лоран около точката $z = a$, както и теореми 9.4-9.6.

**Отговори**: не, да, да, да, да.