5.2 Елементарни функции - Продължение

Тригонометрични функции

Функциите $\cos z$, $\sin z$.

Да си припомним формулата на Euler за експоненциалната функция:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Оттук получаваме

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{ix}}{2}, \sin x = \frac{e^{ix} - e^{ix}}{2i.}$$

Използваме последните зависимости, за да дефинираме функциите $\cos z$ и $\sin z$,именно

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \sin x = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i.}$$

Очевидно така дефинираните функции са цели, т.е. аналитични в цялата комплексна равнина. Наистина,

$$\frac{d \cos z}{dz} = \frac{d}{dz}\frac{e^{iz} + e^{iz}}{2} = \frac{1}{2}i(e^{iz} - e^{-iz}) = -\sin z.$$

По същия начин и

$$\frac{d \sin z}{dz} = \cos z.$$

Ще изброим някои от известните свойства, които се запазват и в комплексния случай:

$$\begin{cases} \sin(z + 2\pi) = \sin z, & \cos(z + 2\pi) = \cos z, \\ \sin(z + \pi) = -\sin z, & \cos(z + \pi) = -\cos z, \\ \sin(-z) = -\sin z, & \cos(-z) = \cos z. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1, & \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \\ \sin(z + \pi) = -\sin z, & \cos(z + \pi) = -\cos z, \\ \sin 2z = 2 \sin z \cos z, & \cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z \end{cases}$$

както и

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

Доказателството следва веднага от дефинициите за $\cos z$ и $\sin z$.

Да разгледаме въпроса за области на еднолистност на двете тригонометрични функции. Както знаем, експоненциалната функция е еднолистна във всяка **хоризонтална** ивица с широчина $\leq 2\pi$, така че, както следва от дефиницията, всяка област на еднолистност на $\cos z$ или $\sin z$ ще се съдържа във **вертикална ивица** със същата широчина. Като вземем по- нататък пред вид тъдествата

$$\sin z = \sin(\pi - z), \cos z = \cos(2\pi - z)$$

получаваме, че функцията $sinz$ е еднозначна в $\{z, -\pi/2 \leq x \leq \pi/2\}$, както и във всяка вертикална ивица $\{z, k\pi/2 \leq x \leq (k+2)\pi/2, \}k = \pm 1, \pm 3, \cdots$. По същия начин установяваме, че функцията $\cos z$ е еднолистна в $\{0 \leq x \leq \pi\}$, както и в $\{z, k\pi \leq x \leq (k+1)\pi\}$, $k = 0, \pm 2, \pm 4, \cdots$.

Произлизащи функции от $\cos z, \sin z$.

Следващите тригонометрични функции се дефинират посредством

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}, \cot z := \frac{\cos z}{\sin z}, \csc z := \frac{1}{\sin z}, \sec z := \frac{1}{\cos z}.$$

Както знаем,

$$\frac{d}{dz}\tan z = \sec^2 z, \frac{d}{dz}\cot z = -csc^2 z,$$
$$\frac{d}{dz}\sec = \sec z \tan z, \frac{d}{dz}csc = -\csc z \cot z.$$

комплекснозначните хиперболични функции. Те също се дефинират като обобщение на реалния случай:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z},$$

както и

$$\mathrm{sech} z := \frac{1}{coshz}, \ \mathrm{csch}\ z := \frac{1}{\sinh z}.$$

Exercises:

1. Пресметнете

$$\sum_{k=0}^{n} e^{kz}.$$

2.Запишете следните числа във вида $a + ib$:

$$e^{2+\pi i/4},\ \sin(2i),\ \cos(1-i), \cosh(\pi i/2).$$

3. Обяснете защо функцията $\Re\frac{\cos z}{e^z}$ е хармонична.
4. Докажете, че e^z е еднолистна във всеки кръг с радиус $< \pi$.
5. Наметере образа на правоъгълника $\{z, -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le pi\}$ при изображението $w = e^z$.
6. Решете уравнението

$$\sin z = \cos z.$$

7. Наметере образа на ивицата $\{z,\ 0 \le x \le \pi/2, 0 \le y\}$ посредством изображението $\tan z$.
8. Обяснете (без да пресмятате) защо функцията $\ln|z|$ е хармонична във всяка област, несъдържаща началото.
9. Покажете, че функцията $\mathrm{Log}\,(-z) + \pi i$ е еднозначен аналитичен клон на функцията $\log z$ в цялата равнина, разрязана по неотрицателната част на реалната права.
10. Наметере първата производна на главната стойност на функцията z^{1+i} в точката $z = i$.