Изпит по Комплексен Анализ, 2006

1. Да се намери аналитична функция $f(z)$ такава че

$$v(x,y) := \text{ Im } f(z) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

и

$$\text{a)}: f(2) = 0, \ \text{b)}: f(2) = i.$$

Решение: Прилагайки уравненията на Коши-Риман, стигаме до представянето

$$\text{Re} f(z) = -\frac{x}{x^2+y^2} + C,$$

където C е реална константа, така че окончателно получаваме

$$f(z) = \frac{-x+y}{x^2+y^2} + C = -\frac{\bar{z}}{|z|^2} + C.$$

Преработването на горния израз води до представянето

$$f(z) = -\frac{1}{z} + C.$$

Очевидно в случая a)

$$f(z) = -\frac{1}{z},$$

докато в случая b) задачата няма решение. £

2. Изобразете областта $\overline{D}_0(1) \setminus [i/2, i]$ върху $\overline{D}_0(1)$.

Решение: Възможно решение е следното:

$$z_1 = e^{-i\pi/2} z,$$

(при това изображение областта се завъртява в отрицателна посока на прав ъгъл), след това трансформацията на Жуковски

$$z_2 = \frac{1}{2}(z_1 + \frac{1}{z_1})$$

изпраща в комплексната равнина, разрязана по отсечката $[-1, 5/4]$, ponatatyk

$$z_3 = \frac{8}{9}(z_2 - \frac{1}{8})$$

трансформира конформно $[-1, 5/4]$ в единичната отсечка, и накрая обратната на Жуковски функция

$$z_4 = z_3 + \sqrt{z_3^2 - 1},$$

с клона

$$z_4(\frac{5}{4}) = \frac{1}{2}$$

дава търсеното изображение. £

3. Пресметнете с помощта на теоремата за резидуумите интеграла

$$I := \int_{C_3(4)} \frac{z}{1 - \cos z} dz.$$

Решение: В кръга $D_3(4)$ функцията $\frac{z}{1-\cos z}$ има особеност само в точката $z = 2\pi$; в точката $z = 0$ особеността е отстранима. Тогава (теоремата за резидуумите)

$$I = 2\pi i 2\pi \lim_{z \to 2\pi} \frac{d}{dz}(\frac{(z - 2\pi)^2}{1 - \cos z}) = 0.$$

4, a). Като използвате интегралната формула на Коши, докажете, че ако функцията f е аналитична върху кръга $\overline{D_a(r)}$ и има представянето в ред на Тейлор

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (z - a)^n,$$

то

$$f(z) - \sum_{n=0}^{m} f_n (z - a)^n = \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n (z - a)^n \frac{1}{2\pi} \int_{C_a(r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta.$$

Решение: Следва от представянето на Тейлоровите коефициенти

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \int_{C_a(r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta.$$

£

4, b) Нека функцията $f(z)$ е аналитична върху кръга $\overline{D}_0(r)$ с изключение на точката $z = 0$, където има изолирана особеност. Нека, по-нататък, производната да има Тейлоровото развитие

$$f'(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n z^n.$$

Възможно ли е $c_{-1} \neq 0$? Да се определи $\mathrm{Res}\,(f, 0)$.

Решение: От условието за f следва, че развитието и' в ред на Тейлор има вида

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{-1} a_n z^n + \sum_{1}^{\infty} a_n z^n.$$

Диференцирането води до представянето за $f'(z)$

$$f'(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} n a_n z^{n-1} + \sum_{1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=-\infty}^{-2} (n+1) a_{n+1} z^n + \sum_{0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n.$$

Като сравним двата реда, виждаме, че $c_{-n} = -(n-1)a_{-n+1}$, $n > 2$, $c_n = (n+1)a_{n+1}$, $n \geq 0$ и

$$c_{-1} = 0.$$

Още

$$\mathrm{Res}\,(f, 0) = a_{-1} = -c_{-2}.$$

5.а) Нека f има нула в точката $z = a$ от кратност m. Да се докаже , че тогава и само тогава функцията $\frac{1}{f(z)}$ има полюс в същата точка от същата кратност.

Решение: Нека точката $z = a$ е нула от кратност m. При това предположение функцията има вида

$$f(z) = (z-a)^m g(z),$$

като функцията $g(z)$ е аналитична в подходяща околност на и $g(z) \neq 0$ в тази околност. Тогава ще имаме представянето

$$\frac{1}{g(z)} = \frac{1}{g(a)} + \sum c_i (z-a)^i,$$

откъдето следва и

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{g(a)} \frac{1}{(z-a)^m} + \sum_{i=-m+1}^{\infty} c_i (z-a)^i,$$

което доказва първата част от твърдението. Доказателството на достатъчността следва същата логика.£

5.b) Нека функцията f има вида $f = \frac{\phi}{\psi}$, като $\phi \neq 0$ в околност на точката $z = a$, а функцията ψ има еднократна нула в същата точка. Да се докаже, че

$$\text{Res }(f, a) = \frac{\phi(a)}{\psi'(a)}.$$

Решение: За ψ е валидно представянето $\psi(z) = (z - a)\chi(z)$, като функцията χ е различна от нула в околност на $z = a$ и $\chi(a) = \psi'(a)$. Действително, ако Тейлоровият ред на $\psi(z)$ е

$$\phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - a)^n,$$

то

$$\chi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} (z - a)^n,$$

като

$$\chi(a) = c_1 = \phi'(a).$$

Следователно $\frac{1}{\psi(z)}$ ще е аналитична около $z = a$ с изключение на самата точка $z = a$, където ще има прост полюс. И така,

$$\frac{\phi}{\psi}(z) = \frac{\phi}{(z-a)\chi(z)}.$$

Тогава

$$\text{Res }(f, a) = \lim_{z \to a} \frac{\phi(z)}{\chi(z)} = \frac{\phi(a)}{\chi(a)} = \frac{\phi(a)}{\psi'(a)}.$$

6. a) Пресметнете

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^n}.$$

Решение: Положете

$$f(z) = \frac{1}{(1 + z^2)^n}$$

и изследвайте границата на

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz,$$

когато $R \to \infty$; контурът Γ_R се състои от отсечката $[-R, R]$ и горната половина на кръга $C_0(R)$.

6. b) Пресметнете

$$I := \int_\Gamma \frac{\sqrt{z}}{z^2+4z+3}dz,$$

като контурът Γ е границата на областта D, състояща се от кръга $D_0(2)$ с извадена отсечка $[0,2]$, обиколена два пъти, а еднозначният клон на функцията $\sqrt{z}$ се определя от условието $\sqrt{i} = e^{\pi i/4}$.

Решение: Изборът на еднозначния клон на $\sqrt{z}$ е: $\sqrt{z} = \sqrt{|z|}e^{iArgz/2}$, като $0 \leq Argz < 2\pi$. В частност,

$$\sqrt{(-1)} = e^{iArg(-1)/2} = e^{\pi i/2} = i.$$

Върху горния и, съответно, върху долния бряг на $[0,2]$ имаме

$$\sqrt{z} = \begin{cases} \sqrt{x}, & z = x \in [0,2] \\ -\sqrt{x}, & z = x \in [2,0] \end{cases}$$

По теоремата за резидуумите ще имаме по-нататък

$$I = 2\pi i \text{ Res } (-1) = \frac{\sqrt{(-1)}}{z+3} = 2\pi i i/2 = -\pi.$$

Нататък решението е ясно.