FESTSTELLUNGSPRÜFUNG in HM2

FDIBA - TU, WS 2008/09 Name:
INFORMATIK Immatrikulationsnummer:

Aufgabe 1: Zu lösen sei, durch Anwendung der Transformation von Laplace, das Anfangswertproblem 9P.

$$u^{(3)}(t) * t - u(t) * \cos t = \int_0^t \tau^2 \sin(t-\tau)d\tau,\ u^{(')}(0) = 0,\ u^{(2)}(0) = u(0) = 1.$$

Aufgabe 2: Sei

$$\mathrm{D}[u] := u^{(4)}(x) + u(x).$$

Löse das Anfangswertproblem 8P.

$$\mathrm{D}[u] = 0, u(0) = u(2) = 1, u'(1) = u'(-1) = 0.$$

Aufgabe 3: Sei 5P.

$$f(x,y) := |x|.$$

Ist die so vorgegebene Funktion eine Normfunktion? Motiviere die Antwort.

Aufgabe 4; Bestimme eine partikuläre Lösung der Gleichung

$$u^{(3)}(x) - u^{(2)}(x) + u'(x) - u(x) = x\cos x + 2\sin x. \qquad 9P.$$

Aufgabe 5: a) Zu lösen seien, durch Anwendung der Potenzreihenmethode, die Anfangswertprobleme

a) $xu^{(3)}(x)+u(x) = 1+x+x^2, u(0) = 1, u'(0) = 1,\ u''(0) = 0.$ 3*P.*

b) $xu^{(3)}(x)+u(x) = 2+x+x^2, u(0) = 1, u'(0) = 1,\ u''(0) = 0.$ 3*P.*

c) Bestimmen Sie, im Fall von Lösbarkeit, die Konvergenzradien der formellen Lösungen. 3P.

Aufgabe 6: Sei

$$u'(x) = \mathcal{A}u(x),\ u(x) : R \longrightarrow R^3,$$

wobei

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 1, & 1, & -2 \\ 0, & 2, & -2 \\ 1, & -1, & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Zu lösen sei das Anfangswertproblem 4P.

$$u(0) = (1,1,1)^T.$$

b) Motiviere den Lösungsweg. 4P.

HM2 - FESTSTELLUNGSPRÜFUNG

FDIBA - TU, WS 2008/09 Name:
Allgemeiner Maschinenbau Immatrikulationsnummer:

Aufgabe 1: Sei

$$\mathrm{D}[u] := u^{(4)}(x) + u(x).$$

Löse das Anfangswertproblem 8P.

$$\mathrm{D}[u] = 0, u(0) = u(2) = 1, u'(1) = u'(-1) = 0.$$

Aufgabe 2: Sei

$$f(x, y) := |x|.$$

Ist die so vorgegebene Funktion eine Normfunktion? Motiviere die Antwort. 5P.

Aufgabe 3: Bestimme eine partikuläre Lösung der Gleichung

$$u^{(3)}(x) - u^{(2)}(x) + u'(x) - u(x) = x \cos x + 2 \sin x.$$

9P.

Aufgabe 4: a) Zu lösen seien, durch Anwendung der Potenzreihenmethode, die Anfangswertprobleme

a)

$$xu^{(3)}(x) + u(x) = 1 + x + x^2, u(0) = 1, u'(0) = 1, \ u''(0) = 0.$$

3P

b)

$$xu^{(3)}(x) + u(x) = 2 + x + x^2, u(0) = 1, u'(0) = 1, \ u''(0) = 0.$$

3P.

c) Bestimmen Sie, im Fall von Lösbarkeit, die Konvergenzradien der formellen Lösungen. 3P.

Aufgabe 5: Sei

$$u'(x) = \mathcal{A}u(x), \ u(x) : R \longrightarrow R^3,$$

wobei

$$\mathcal{A}; = \begin{pmatrix} 1, & 1, & -2 \\ 0, & 2, & -2 \\ 1, & -1, & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Zu lösen sei das Anfangswertproblem 4P.

$$u(0) = (1, 1, 1)^T.$$

b) Motiviere den Lösungsweg. 5P.

Lösungen:

Aufgabe: Sei

$$\mathrm{D}[u] := u^{(4)}(x) + u(x).$$

Löse das Anfangswertproblem 8P.

$$\mathrm{D}[u] = 0, u(0) = u(2) = 1, u'(1) = u'(-1) = 0.$$

Lösung: Wir schreiben das charakteristische Polynom auf:

$$\mathcal{P}(\lambda) := \lambda^4 + 1,$$

seine Nullstellen sind

$$\lambda_j = \exp{(i\frac{\pi + 2j\pi}{4})},\ j = -1, 0, 1, 2.$$

Diese Nullstellen erzeugen, (WARUM) folgende linear unabhängige partikuläre Lösungen:

$$u_1(x) = \cos\frac{x\pi}{4},\ u_2(x) = \sin\frac{x\pi}{4},\ u_3(x) = \cos\frac{3\pi x}{4},\ u_4(x) = \sin\frac{3\pi x}{4}.$$

Die allgemeine Lösung ist:

$$U(x) = \sum C_i u_i(x).$$

Aus den Anfangsbedingungen ergibt sich:

$$\begin{array}{l} \sum C_i u_i(0) = 1, \\ \sum C_i u_i(2) = 1, \\ \sum C_i (u_i)'(1) = 0, \\ \sum C_i (u_i)'(-1) = 0. \end{array}$$

Da die Funktionen $u_1, i = 1, \cdots, 4$ linear unabhängig sind, ist die bestimmende Determinante nicht singulär (Satz von Wandermond), und das Gleichungssystem von oben bezüglich $C_1, i = 1, 2, 3, 4$ besitzt eine eindeutig bestimmte Lssung.

Aufgabe: Sei

$$f(x, y) := |x|.$$

Ist die so gegebene Funktion eine Normfunktion? Motiviere die Antwort. 5P.

Lösung: Wäre $f(x, y)$ eine Normfunktion, sollte

$$f(x, y) = 0 \longleftrightarrow (x, y) = (0, 0).$$

Letzteres gilt aber in diesem Fall nichr, da für jedes Paar $(0, y)$, auch mit $y \neq 0$ ist $f(0, y) = 0$. Antwort: Keine Normfunktion.

Aufgabe: Bestimme eine partikuläre Lösungder Gleichung

$$\mathbb{D}[u] := u^{(3)}(x) - u^{(2)}(x) + u'(x) - u(x) = x \cos x + 2 \sin x.$$

9P

Lösung:

$$\mathcal{P}(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1,$$

Nullstellen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -1$. Eine partikuläre Lösung wäre der Form

$$\eta(x) = (ax^2 + bx) \cos x + (cx^2 + dx) \sin x.$$

Die Koeffizienten werden aus der Gleichung

$$\mathbb{D}[\eta] = x \cos x + 2 \sin x$$

errechnet. Um schneller zu den Werten von a, b, c und d zu kommen, muss man folgende Regeln berücksichtigen:

1. Regel von Leibnitz:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} (f)^{(k)}(g)(n-k),$$

2.

$$(x^l)^{(k)} = \begin{cases} l(l-1)\cdots(l-k+1), & l \leq k, \\ 0, & k > l, \end{cases}$$

3.

$$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x.$$

Aufgabe: a) Zu lösen seien, durch Anwendung der Potenzreihenmethode, die Anfangswertprobleme

a) 3P.

$$\mathbb{D}[u] := xu^{(3)}(x) + u(x) = 1 + x + x^2, u(0) = 1, u'(0) = 1, u''(0) = 0.$$

b)

$$xu^{(3)}(x) + u(x) = 2 + x + x^2, u(0) = 1, u'(0) = 1, u''(0) = 0.$$

3P.

c) Bestimmen Sie, im Fall von Lösbarkeit, die Konvergenzradien der formellen Lösungen. 3P.

Lösung: Gesucht sei u in der Form

$$u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i.$$

Dabei gilt

$$c_o = u(0),\ c_1 = u'(o).$$

Setzt man in die Gleichung ein, bekommt man

$$\mathbb{D}[u] = \sum_{i=1}^{\infty} c_{i+2} i(i+1)(i+2)x^i + \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = c_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (c_{i+2} i(i+1)(i+2) + c_i)x^i.$$

Offenbar hat die Bedingung (2) keine Lösung, sonst wäre $2 = c_0 = 1$. Für $i = 1$ gilt, nach dem Prinzip der Feoffizientenvergleich,

$$c_1 + 2.3c_3 = 1,$$

also ist

$$c_3 = 0;$$

für $i = 2$ -

$$c_2 + 2.3.4.5c_4 = 0 \longrightarrow c_4 = -1/2.3.4.$$

Aus der Bedingung $c_3 = 1$ folgt, dass $c_{2k+1} = 0$. Weiter, durch Anwendung der Induktion, gelangt man bei

$$c_{2k} = \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!(4.6.\cdots(2k-2)} = \frac{(-1)^k}{(2k)!2^{k-2}(k-1)!},\ k = 2, 3, 4, \cdots.$$

Um den Konvergenzradius R zu bestimmen, wendet man die Formel von Hadamard an:

$$R = \frac{1}{\limsup_{i \to \infty} |c_i|^{1/i}}.$$

Wendet man nun die Formel von Stirling an, nämlich;

$$\frac{n}{n!^{1/n}} \to e,\ n \to \infty,$$

sieht man ein, dass $R = \infty$ ist, aLSO ist die Potenzreihe für alle x konvergent.