Algebra, Analytische Geometrie.

1. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1, & 0 & ,9 \\ -1, & 2, & 3, \\ -2, & 2, & 2, \end{pmatrix}.$$

Zeige, daß A nichtsingulär ist und berechne die Inverse Matrix.

Lösung: A ist nicht singulär, wenn $\det A \neq 0$. Ist das der Fall, so gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{1,1}, & A_{2,1}, & A_{3,1}, \\ A_{1,2}, & A_{2,2}, & A_{3,2}, \\ A_{1,3}, & A_{2,3}, & A_{3,3}, \end{pmatrix}.$$

2. Seien die geraden Linien l_1, l_2 vorgegeben,

$$l_1 : \begin{array}{l} x = \varrho + 1, \\ y = \varrho, \\ z = 0 \end{array}$$

und

$$l_2 : \begin{array}{l} x = \mu - 1, \\ y = -\mu, \\ z = 1, \end{array}$$

$\varrho, \mu \in (-\infty, \infty)$.
Finde die Gleichung einer geraden Linie, die orthogonal zu beiden ist. MOtiviere die Existenz der Lösung.
Berechne den Winkel zwischen l_1 und l_2.

Lösung: Bestimme zwei Vektoren, die je paralell zu $l_i, i = 1, 2$, sind und gehe vom Vektorprodukt aus.

3. Untersuche nach Lösbarkeit das System

$$\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x + ay + z = 0 \\ x + y + a^2 z = b \end{array}$$

wo a und b freie Parameter sind.
4. Schreibe die Gleichung der Ellypse mit Fozi in den Punkten ± 1, deren große Halbachse $= 4$ ist auf, sowie die Gleichung der Hyperbell Ξ, deren Foci F_{-1}, F_2 in ± 2 liegen und für jeden Punkt $M \in \Xi$

$$||MF_1| - |MF_2|| = 2.$$

Finde die Schnittpunkte beider.
5. Gegeben sei

$$\mathcal{A}; = \begin{pmatrix} 1, & 1, & -2 \\ 0, & 2, & -2 \\ 1, & -1, & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechne die Eigenwerte und - vektoren von A.

Analysis.

1. Berechne

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n^2}.$$

2. Sei $f \in C^{(3)}[a,b]$, wobei $f^{(3)}(x) = 0$, $x \in [a,b]$. Zeige, daß f der Form ist

$$f(x) = C_0 x^2 + C_1 x + C_2.$$

Lösung: Wende den Hauptsatz der Differentialrechnung an.
3. Berechne

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right).$$

4. Sei die Ellypse

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Sei $\mathcal{M}$ die Menge aller Rechecke, deren Eckpunkte auf $\mathcal{E}$ liegen. Zu finden sei derjenige, der die größte Fläche hat.
5. Finde die Fläche des Durchschnitts der Kugeln $K_i, i = 1,2$

$$K_1 := \{z, |z-2| \le 3\},\ K_2 := \{z, |z-4| \le 2\}.$$

2. Schreibe die Gleichung der Hyperbell Ξ auf, deren Foci F_1, F_2 die Punkte

± 1 sind und für jeder Punkt $m \in \Xi$

$$||MF_1| - |MF_2|| = 4.$$

3. Schreibe die Gleichung der geraden Linie auf, die durch die Punkte $(1, 0, 1)$ und $(2, 2, 1)$ durchgeht. Finde den Schnittpunkt mit der Ebene $\alpha : x+y+z = 1$.

4. Seien die Ebenen $\alpha : x + z = 1$ und $\beta : x - y + 1 = 0$ gegeben. Berechne die Größe des Winkels dazwischen.

5. Seien die Punkte $A(1, 0, 1)$ und $B(-1, 2, 0)$ gegeben, Finde die gerade Linie, die senkrecht zum Segment mit Endpunkten in A und in B undgleichentfernt davon ist.

6. Seien die Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ linear unabhängig. Zeige, dass die Vektoren $u \vec{+} v, v \vec{+} w, w \vec{+} u$ die lineare Unabhängigkeit behalten.

1. Sei f konvex nach unten auf dem Intervall $[a, b]$, wobei $f \in C^2[a, b]$. Beweise, dass f kein lokales Maximum auf $[a, b]$ besitzt.

2. Sei f konvex auf dem Intervall $[a, b]$. Zeige, daßsie stetig sein soll.

3. Sei $P(x) = x(x-1)^2(x+3)$. Finde die Abweichung von P auf dem Intervall $[-2, 1]$, d.h.

$$E_P := \sup_{[-2 \leq x \leq 0]} |P(x)|.$$

Hinweis: Finde die Extremalwerte auf $[-2, 1]$ und untersuche ihre Vorzeichen.

4. Finde die Anzahl der reellwertigen Nullstellen der Funktion

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0.$$

Hinweis: Bestimme die lokalen Extremas und untersuche ihre Vorzeichen.

5. Sei

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & -1 \leq x \leq 1, \\ x - 1, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Berechne

$$\int_{-1}^{2} f(x) dx.$$

6. Berechne

$$\int_{1/e}^{e} |\ln(x)| dx.$$

Hinweis: Beachte, daßln $e = 1$ und wende dann partielle Integration an.

7. Berechne

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{5-4x}} dx.$$

Hinweis: Führe passende Substitution an (z.B $\sqrt{5-4x} = u$).

Analysis, Jan 2008

1. Gegeben sei rekkurent; $\{a_n\}$, $a_0 = 0, a_n = \frac{1}{2-a_{n-1}}$.

Zu zeigen sei:
a) $\{a_n\}$ ist von oben durch die Eins beschränkt ;
b) $\{a_n\}$ ist konvergent, durch Untersuchung nach Monotonie.
Lösung: Wir wenden math. Induktion an. Unsere vermutung ist die Behauptung der Ausgabe. Da $a_1 0\frac{1}{2} < 1$, gilt die Hythese für $n = 1$. Sei irgendein $a_n < 1$. Aufgrund dessen wollen wir beweisen, daß auch

$$a_{n+1} < 1.$$

Tatsächlich, dank der Vermutung gilt h

$$2 - a_n > 1,$$

was

$$a_{n+1} := \frac{1}{2 - a_n} < 1$$

erbringt. Nach dem Prinzip der vollständigen math. INDUKTION IST DIE vERMUTUNG fü alle n richtig.
b) Wir untersuchen die Differenz $a_{n+1} - a_n, n = 1, 2, \cdots$. Es gilt

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2 - a_n} - a_n = \frac{(1 - a_n)^2}{2 - a_n},$$

was offenbar positiv ist. Also ist die Folge monoton wachsend. Da aber sie beschränkt ist, soll sie nach dem Satz über monotone Folgen konvergent sein.

Erst jetzt muss man den exakten Grenzwert nennen. Es ist falsch, die Eins als Grenzwert anzugeben, denn die Eins ist nur eine obere Grenze. Der Grenzwert soll aus der Rekkursionsformel berechnet werden. Sei

$$l := \lim a_n.$$

Wir bekommen

$$l = \frac{1}{2 - l}.$$

Also ist

$$1 = \lim a_n.$$

Q.E.D.

$e^{\frac{1}{x}}$

2. Berechne die Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 1}(\frac{3}{x^2-1}-\frac{1}{x-1})\text{und}\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}.$$

Lösung: a) Es liegt Unbestimmtheit $\infty-\infty$ vor. Die Verarbeitung führt zu: $\frac{x(3-x)}{x-1}$, was offenbar gegen ∞ divergiert.
b) wir schreiben

$$\frac{1-x}{\tan\frac{\pi x}{2}}=\frac{1-x}{\cos\pi/2x}\sin\pi/2x\to\frac{(1-x)'}{(\cos x\pi/2)'}=-\frac{2}{\pi}.$$

4. Bestimme en Wendepunkt der Funktion

$$f(x):=(x+1)e^{\frac{1}{x}},\ x\neq 0.$$

Lösung: Da $f\in C^2(R\setminus 0)$, ist $f''(x_0)=0$ die hinreichende und genügende Bedingung dafür, daß der Punkt x_0 ein Wendepunkt ist. Wir müssen also alle Punkte finden, wo die zweite Ableiting $=0$ ist.

Nach der Formel von Leibnitz ist

$$((x+1)e^{\frac{1}{x}})^{(2)}=\sum_{k=0}^{2}(x+1)^{(k)}(e^{\frac{1}{x}})^{(2-k)},$$

was, wenn man bedenkt, daß $(x+1)^{(2)}=0$, endgültig zu

$$((x+1)e^{\frac{1}{x}})^{(2)}=\sum_{k=0}^{1}(x+1)^{(k)}(e^{\frac{1}{x}})^{(2-k)}=e^{\frac{1}{x}}\frac{x^2+3x+1}{x^4}.$$

Die Wendepunkte sind die Nullstellen des Zählers.

4.