Като начало ще въведем понятието *конформност на функция.*

Definition: *Нека изобравението f е дефинирано в околност на точката z_0. Казваме, че то е конформно в z_0, ако запазва ъглите както по големина, така и по посока.*

Достатъчно условие за конформността на f в z_0 е съществуването на първа производна $f'(z_0)$ и $f'(z_0) \neq 0$.

Доказателство: Да си припомним геометричния смисъл на производната. Всеки път, когато $f'(z_0) \neq 0$ имаме

$$\lim_{z \to z_0} \text{Arg } (f(z-z_0) - f(z_0)) = \lim_{z \to z_0} \text{Arg } (z-z_0) + \text{Arg } f'(z_0),$$

което ни дава право да считаме, че когато z е достатъчно близо до z_0, то

$$\text{Arg } (f(z-z_0) - f(z_0)) \approx \text{Arg } (z-z_0) + \text{Arg } f'(z_0).$$

Нека сега кривите γ_1, γ_2 се пресичат в точката z_0. Ъгълът между тях е този между двете допирателни през точката z_0. Оставяйки точката да клони към z_0 по едната и след това по другата допирателна и използвайки последната зависимост, стигаме до изказаното твърдение.

Дробно линейна трансформация [1]

Definition: *Трансформацията*

$$\phi(z) := Az + B$$

при която $A \neq 0$ се нарича Цяла Линейна Трансформация.

Ако използваме записа

$$A = |A|e^{i\alpha}, \alpha := \text{ Arg } A,$$

[1])нарича се още **транформация на Möbius**

то резултатът от действието на Цялата линейна трансформация върху комплексното число

$$z := |z|e^{i \text{ Arg z}}$$

има вида

$$\phi(z) = |A||z|e^{i(\text{ Arg z}+\alpha)} + B, \tag{1}$$

което, както се вижда, е последователно извършване на хомотетия с коефициент $|A|$, ротация на ъгъл α и транслация в посока B.

Обръщаме внимание върху факта, че всяка една от тези трансформации преобразува права в права и окръжност в окръжност.

Въвеждаме сега трансформацията

$$\psi(z) := \frac{1}{z}.$$

За нея отбелязваме, че тя трансформира обобщена окръжност в обобшена окръжност, т.е., окръжност върху Римановата сфера в окръжност върху сфера. Действително, както знаем, уравнението на права през точките [2] a, b има вида

$$l : z(\bar{a} - \bar{b}) - \bar{z}(a - b) + \bar{b}q - \bar{a}b = 0, \tag{2}$$

а уравнението на окръжност с център в точката z_0 и радиус R е

$$C : z\bar{z} - z\bar{z}_0 - \bar{z}z_0 + |z_0|^2 - R^2 = 0.$$

Непосредствената проверка установява горното твърдение.

Общ вид на Дробно - Линейна Трансформация

$$w(z) := \frac{az + b}{cz + d}, \; ad - bc \neq 0.$$

При $c = 0$ трансформацията е от вида (1), при $a = 0-$ от вида (2), така че нека

$$ca \neq 0.$$

Тогава ще имаме

$$w(z) = \frac{a}{c}\left(1 + \frac{bc - ad}{a(cz + d)}\right) \tag{3}$$

[2])върху Римановата сфера правата се изобразява с окръжност, която минава през северния полюс **N**, т.е. през безкрайната точка върху Гаусовата равнина.

което обосновава изискването

$$ad - bc \neq 0. \tag{4}$$

От последното представяне се вижда още, че функцията на Möbius е композиция на цялата линейна функция $\phi(z) = Az + B$, $|A| + |B| > 0$ и на функцията $\psi(z) = 1/z$.

Използвайки представянето (3), лесно проверяваме още, че трансформацията на Möbius е взаимно еднозначно изображение, т.е., [3]

$$w(z_1) \neq w(z_2), z_1 \neq z_2$$

както и че

$$w'(z) \neq 0, \ z \in \mathbb{C}.$$

Последното неравенство осигурява, както знаем, конформността на функцията $w = w(z)$ при наличието на (4) в цялата комплексна равнина $\mathbb{C}$.

Завършваме тези разглеждания с формулирането на

Теорема 1: *Трансформацията на* Мöбиус $w = w(z)$, *при която коефициентите* a, b, c, d *удовлетворяват* (4), *е взаимно-еднозначно конформно съотвецтвие на разширената Гаусоща ращнина* $\overline{\mathbb{C}}$ *върху себе си.*

Нека $w(z) = w$. Дефинираме "обратната" трансформация $w^{-1}(w)$,т.е.$w^{-1}(w(z)) \equiv z$. Простото пресмятане показва, че

$$w^{-1}(w) = z = \frac{-wd - b}{wc - a}.$$

Очевидно w^{-1} е също трансформация на Möbius, коефициентите на която удовлетвотяват условието (4).

Оставяме на читателя да провери, че множеството на трансформациите на Möbius в комплексната равнина е група относно "умножението" $w_1 \circ w_2(z) := w_1\left(w_2(z)\right)$ с единица идентитета $I(z) \equiv z$.

Definition: Ще казваме, че трансформацията на Möbius има двойна точка в $z = z_0$, ако $w(z_0) = z_0$.

[3]такива изображения се наричат "**еднолистни.** "

Лесно проверяваме, по нататък, че $w(z)$ има най-много две двойни точки, освен ако не съвпада с идентитета. Действително, определянето на двойните точки се свежда до решаване на квадратното уравнение

$$az + b = cz^2 + dz.$$

За наличието на повече от две двойни точки е необходимо и достатъчно

$$a = d,\, b = c = 0,$$

което и дава идентитета. И така стигаме до

Теорема 2: *Трансформацията на Мöбиус се определя еднозначно от три различни точки.*

Доказателство:Действително, нека $T(z)$ и $S(z)$ са такива, че $T(z_1) = S(z_i), i = 1, 2, 3$. Тогава $T^{-1} \circ S(z_i) = z_i, i = 1, 2, 3$, което, както знаем е възможно само когато $T^{-1} \circ S \equiv I$. Но тогава $T \equiv S$. **Q.E.D.**

Нека сега $z_i, i = 1, 2, 3; w_i, i = 1, 2, 3$ са две тройки различни помежду си точки. Ще търсим трансформация $w(z)$, която да изпраща съответно z_i в $w_i, i = 1, 2, 3$. За тази цел да разгледаме изображението $w = w(z)$ дефинирано по следния начин

$$\frac{z - z_1}{z - z_3}\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_3}\frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} \tag{5}$$

Директно проверяваме, че

$$w(z_i) = w_i,\ i = 1, 2, 3$$

От Th.2 следва, че функцията $w = w(z)$ дефинирана с (5) е единствената със свойството $w(z_i) = w_i,\ i = 1, 2, 3$.

ПРИМЕР:: Neka

$$w(z) := \frac{z + 1}{z - 1}.$$

Да се намери образът на реалната и на имагинерната ос $\mathbf{R}, \mathbf{I}$ и на единичната окръжност C_1.

Решение: При посоченото изображение точките ± 1 отиват съответно в $0, \infty$, а нулата и безкрайно отдалечената точка в (z) - в -1 и единичната точка.Веднага се вижда, че образът $w(\mathbf{R})$ на $\mathbf{R}$ ще бъде реалната права. Образът на $\mathbf{I}$ ще бъде окръжност през ± 1, при това ортогонална на $w(\mathbf{R})$, поради конформността. Това е единичната окръжност в равнината (w). Единичната окръжност $C_1 \subset (z)$ ще се трансформира в окръжност в (w) през точките $0, \infty \subset (z)$ и ортогонална на $\mathbf{R}$, т.е. в имагинерната ос в (w).

Ще приемем без доказателство следващата

Теорема 3: *Нека D е област в равнината $\mathbb{C}$ и границата и е Γ. Нека точките $z_i, i = 1, 2, 3$ са разположени по такъв начин върху Γ, че при движението $z_1 \longrightarrow z_2 \longrightarrow z_3$ областта D остава от лявата страна. Нека $T(z)$ е трансформация на* Möbius *с условието* (4). *Тогава образът на D е областта, която се намира отлявата страна на $T(z_1) \longrightarrow T(z_2) \longrightarrow T(z_3)$.*

Definition: Нека $C_a(R)$ е окръжност с център $z = a$ и радиус R. Ще казваме, че двете точки z, z^* са симетрични, или инверсни спрямо ако са свързани със съотношението

$$\bar{z^*} = \frac{R^2}{z - a} + \bar{a}.$$

При $z = a$ полагаме $z^* := \infty$.

Както знаем, точките z, z^* са симетрични спрямо правата l, ако са разположени от двете í страни и разсточнията им до правата са еднакви. В бъдеще ние ще ползваме понятието "симетрични " точки, като при това ще имаме предвид както симетрич спрмо права, така и инверсич спрямо окръжност.

Доказателството на следната теорема оставяме на читателя

Теорема 4: *При дробно линейните трансформации симетричните точки се преобразуват в симетрични.*

ПРИМЕР: Да се намери общият вид на дробно линейната трансформация, която преобразува единичния кръг в себе си.

РешениеНека a е произволна точка от единичния кръг$(|a| < 1)$; означаваме с a^* инверсната и спрчмо $C_1; a^* = \frac{1}{\bar{a}}$. Изображението

$$T(z) := K \frac{z - a}{z\bar{a} - 1}, \, K = \text{ constant} \tag{6}$$

изпраща a в 0 и a^* в ∞. Образът на едниничната окръжност ще е окръжност, спрямо която нулата и безкрайността са симетрични, т.е., окръжност с център в нулата. За да определим стойността на

K, ще положим $z = e^{i\phi}$ и ще искаме $|T(z)| = 1$.Имаме последователно

$$|K\frac{e^{i\phi}-a}{e^{i\phi}\bar{a}-1}| = |K\frac{e^{i\phi}-a}{e^{-i\phi}-\bar{a}}| = |K| = 1,$$

или търсеното изображение има вида (6) с

$$K = e^{i\alpha}.$$

Exercises:

1. Да се намери образа на сноповете прави $y = kx$, $y = ax+b$, както и на окръжностите $x^2+y^2 = ax$, $x^2+y^2 = by$ при изображението $w = 1/z$.

2. Определете образа на $\{x, y \geq 0\}$ при $w = \frac{z-i}{z+i}$.

3. Определете образа на ъгъла $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$ при $w = fraczz - 1$.

4. Определете образа на ивицата $\{0 \leq x \leq 1\}$ посредством $w = \frac{z-1}{z}$ и посредством $w = \frac{z-1}{z-2}$. 5. Намерете симетричниза образ на

кривите $|z| = 1/2, , |z-1| = 1$, $x = 2$ спрямо единичната окръжност
6. Намерете ДЛТ $w(z)$, изобразяваща горната полуравнина върху

единичния кръг така, че
a) $w(i) = 0$, Arg $w'(i) = -pi/2$ и
b) $w(i) = 0, w(2i) = 1/2$.

7. Намерете общия вид на ДЛФ, трансформираща горната полуравнина в себе си.

8. Изобразете еднолистно и конформно в горната полуравнина областта $D := \{z, |z| > 1\} \bigcap \{z, \Im z \leq 1\}$.

Решение Трансформацията

$$z_1 := \frac{z+i}{z-i}$$

изпраща областта във вертикалната ивица $\{z, 0 < \Re z < 1\}$. Разтягаме до широчина $= \pi$ и ротираме след това чрез

$$z_2 := \pi e^{\pi/2} z_1$$

-така стигаме до ивицата $\{z, 0 < \Im z < \pi\}$.Изображението

$$z_4 := e^{z_3}.$$

отвежда върху горната полуравнина.

Търсената функция е композицията на трите изображения :

$$f(z) = z_4 \circ z_3 \circ z_2 \circ z_1(z).$$