II. Потенциал - дефиниция, основни свойства.

7. Логаритмичен потенциал

Definition: Нека μ е крайна Борелева мярка в $\mathbf{B}(\mathbb{C})$. Изразът

$$U^{\mu}(z) := \int_{\mathrm{supp}(\mu)} \log \frac{1}{|z-t|} d\mu(t)$$

се нарича *логаритмичен потенциал спрямо* μ.

Ще отбележим, че U^{μ} е добре дефиниран; при тоща е възможно и $U^{\mu}(z) = \infty$.

Следващите теореми характеризират основните свойства на логаритмичния потенциал. ([1], [2]).

Теорема 7.1 *Логаритмичния потенциал е суперхармонична функция в* $\mathbb{C}$.

Доказателство a) Ще започнем с установяване на неравенството

$$U^{\mu}(z) > -\infty$$

за всяко $z \in \mathbb{C}$. Да фиксираме по произволен начин точката $z \in \mathbb{C}$ и числото M, такова, че

$$|z-t| \leq M, \, t \in \mathrm{supp}(\mu).$$

Тогава

$$\frac{1}{|z-t|} \geq \frac{1}{M},$$

следователно

$$U^{\mu}(z) \geq \log \frac{1}{M} \mu(\mathbb{C}).$$

b) По нататък ще установим, че U^{μ} е полунепрекъсната отдолу.

Действително, знаем, че всяка еможе да се представи като граница на монотонно растяща редица от непрекъснати функции. От друга страна, представянето

$$U^{\mu}(z) = \lim_{M \to \infty} \int \min \left(\frac{1}{M}, \log \frac{1}{|z-t|}\right) d\mu(t)$$

е лесно доказуемо. При това, редицата вдясно е монотонно растяща по m. Следователно, логаритмичният потенциал е полунепрекъснатата отдолу функция.
c) Остава да проверим и неравенството

$$U^\mu(z) \geq \int_0^{2\pi} U^\mu(z - re^{i\Theta}) d\Theta$$

за подходяща число $r > 0$ (вж. параграф 4.) Както вече знаем, функцията $\log\frac{1}{|z-t|}$ е суперхармонична, следователно

$$\log\frac{1}{|z-t|} \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\frac{1}{|z-t-re^{i\Theta}|} d\Theta$$

за подходяща число $r > 0$. Оттук следва

$$\int_{\mathrm{supp}(\mu)} \log\frac{1}{|z-t|} d\mu(t) \geq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{supp}(\mu)} (\int_0^{2\pi} \log\frac{1}{|z-t-re^{i\Theta}|} d\Theta) d\mu(t)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\int_{\mathrm{supp}(\mu)} \log\frac{1}{|z-t-re^{i\Theta}|} d\mu(t))\, d\Theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U^\mu(z - re^{i\Theta}) d\Theta.$$

С това доказателството е завършено.(вж Пар. 4.) **Q.E.D.**

Следващата теорема характеризира функцията извън носителз на определящата мярка. ([3], [2])

Теорема 7.2 *Логаритмичният потенциал $U^\mu(z)$ е хармонична функция във всяко отворено G множество в $\mathrm{supp}(\mu)^c$, като*

$$U^\mu(z) = \mu(\mathbf{C}) \log|z| + O(|z|^{-1}),\ z \to \infty.$$

Доказателство Нека $G \subset \mathrm{supp}(\mu)^c$ е отворено множество;нека F е кръг с център $w \in G$ и радиус r, такъв, че $\mathrm{dist}(w,\ \mathrm{supp}(\mu)) > r$. Последната конструкциаы е възможна, поради това, че множеството $G \bigcap \mathrm{supp}(\mu) = \emptyset$ е отворено. Разглеждаме $\Delta U^\mu(z)$ за $z \in F$. За тези стойности имаме

$$\Delta U^\mu(z) = \Delta \int_{\mathrm{supp}(\mu)} \log\frac{1}{|z-t|}\, d\mu(t)$$

$$= \int_{\mathrm{supp}(\mu)} \Delta_z \log\frac{1}{|z-t|}\, d\mu(t) = 0,\ z \in G.$$

Видяхме, че потенциалът е хармоничен в подходяща околност на всяка точка от отвореното множество G. С това, твърдението е доказано. **Q.E.D.**

Примери

1. Да пресметнем логаритмичния потенциал на мярката μ, такава, че $d\mu = \frac{1}{2\pi} d\Theta$ с носител окръжността с център в нулата и с радиус r. В този случай

$$U^{\mu}(z) := \frac{1}{2\pi} \int \log \frac{1}{|z - re^{i\Theta}|} d\Theta.$$

Както вече знаем (Пар. 4,)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|z - re^{i\Theta}| d\Theta = \begin{cases} \log|z|, & |z| > r| \\ \log r, & |z| \le r \end{cases} \tag{1}$$

С това

$$U^{\mu}(z) = \begin{cases} \log\frac{1}{|z|}, & |z| > r| \\ \log\frac{1}{r}, & |z| \le r \end{cases}$$

В общия случай, когато мярката μ, определена чрез $d\mu = \frac{1}{2\pi} d\Theta$ върху окръжността $\partial\Delta(a, \rho)$, асоциираният логаритмичен потенциал има съответно вида

$$U^{\mu}(z) = \begin{cases} \log\frac{1}{|z-a|}, & |z - a| > \rho| \\ \log\frac{1}{r}, & |z - a| \le \rho \end{cases}$$

2. Нека μ е мярката с носител интервала $[-1, 1]$, зададена чрез

$$d\mu = \frac{1}{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Тази мярка се нарича arcsin-ова, защото

$$\int_{\alpha}^{\beta} d\mu = \frac{1}{\pi}(\arcsin(\beta) - \arcsin(\alpha)),\ -1 \le \alpha \le \beta \le 1.$$

Ще отбележим, че

$$\mu([-1, 1]) = 1.$$

Такива мерки се наричат единични.

3. Нека P_n е полином от степен n и δ_z е мярката на Dirac в точката z.[1] Да означим с $\zeta_i, i = 1, \cdots, n$ нулите на полинома P_n. Въвеждаме единичната мярка

$$\nu_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{\zeta_i}.$$

Тази мярка се нарича вероятностна или броящa[2] и играе важна роля в теорията на потенциала.Нека P_n е редица от полиноми с нули върху единичния интервал, такива, че асоциираните с тях вероятностни мерки клонят слабо към арксинусовата мярка. т,е,

$$\nu_{P_n} \longrightarrow \mu.$$

В този случай нулите на полиномите имат асимптотически арксинусово разпределение върху интервала.

Следват някои от основните характеристики на потенциала ([4],[2],[3])

Ще докажем като начало принципа за понижение [3]([2]).

Теорема 7.3 *Нека* $\mu_n \longrightarrow \mu, n \to \infty$. *Тогава*

$$U^{\mu}(z) \leq \liminf_{n\to\infty} U^{\mu_n}(z), , z \in C. \tag{2}$$

Доказателство Действително, логаритмичният потенциал е според Th.7.1 суперхармонична функция, а следователно, по дефиниция, и полунепрекъсната отдолу. Прилагайки Th. 6.2, спрямо редицата $U^{\mu_n}(z)$ и $U^{\mu}(z)$, получаваме веднага (2).

Нека сега $\{z_n\}$ *е безкрайна редица,* сходяща към точката $z \in$ **C**. Какво е поведението на редицата $U^{\mu_n}(z_n)$ когато $\mu_n \longrightarrow \mu$? Отговорът дава *обобщения принцип за понижение* [4]:

Теорема 7.4 *Нека* $z_n \to z_0$ *и* $\mu_n \longrightarrow \mu$.*Тогава*

$$U^{\mu}(z_0) \leq \liminf_{n\to\infty} U^{\mu_n}(z_n).$$

[1]
$$\delta_z(w) := \begin{cases} 1, & z = w \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

[2] probability, counting measure

[3] descent principle

[4] generalized descent principle

Доказателство : Нека $z_n \to z_0$. Както знаем, всяка полунепрекьсната отдолу функция е граница на монотонно растяща редица от непрекьшнати функции. Или

$$U^\mu(z_0) = \lim_{M\to\infty} \int \min\,(M, \log \frac{1}{|z_0 - t|}) d\mu(t).$$

По Th. 7.3 имаме по -нататьк

$$\int \min\,(M, \log \frac{1}{|z_0 - t|}) d\mu(t) \le \liminf \int \min\,(M, \log \frac{1}{|z_0 - t|}) d\mu_n(t).$$

Оттук следват оценките

$$U^\mu(z_0) \le \lim_{M\to\infty} \liminf \int \min\,(M, \log \frac{1}{|z_n - t|}) d\mu_n(t) \le \liminf \int \log \frac{1}{|z_n - t|} d\mu_n(t)$$
$$= \liminf U^\mu(z_n).$$

Q.E.D.

Теорема 7.5, принцип за непрекъснатостта [4] *Нека* μ *е крайна борелева мярка с компактен носител* $\operatorname{supp} = K$ *и нека* $\zeta \in K$.
a): *Тогава*

$$\limsup_{z\to\zeta} U^\mu(z) = \limsup_{z\to\zeta,\, z\in K} U^\mu(z).$$

b): По-нататък, ако

$$\lim_{\eta\to\zeta,\eta\in K} U^\mu(\eta) = U^\mu(\zeta,)$$

то

$$\lim_{z\to\zeta,} U^\mu(z) = U^\mu(\zeta).$$

Доказателство
a): Нека $U^\mu(\zeta) = \infty$. Частта **a** следва от суперхармоничността на логаритмичния потенциал. Разглеждаме $U^\mu(\zeta) < \infty$.По необходимост, тогава, $\mu(\{\zeta\}) = 0$. Следователно, ако $\varepsilon >$ е фиксирано число, то ве съществува $r > 0$, такова, че $\mu(\Delta(\zeta, r)) \le \varepsilon$. Фиксираме сега $z \in \mathbf{C}$ и избораме $\tau \in K$, което да минимизира $|z - \omega|$, когато $\omega \in K$. Ще отбележим, че $\tau \to \zeta$, когато $z \to \zeta$. Освен това за всяко $\omega \in K$ получаваме

$$\frac{|\omega - \tau|}{|z - \omega|} \le 2.$$

Поради това

$$U^\mu(z) = U^\mu(\tau) + \int_K \log\frac{|\omega-\tau|}{|z-\omega|}d\mu(\omega) =$$

$$U^\mu(\tau) + \int_{K-\Delta(\zeta,r)} \log\frac{|\omega-\tau|}{|z-\omega|}d\mu(\omega) + \int_{\Delta(\zeta,r)} \log\frac{|\omega-\tau|}{|z-\omega|}d\mu(\omega)$$
$$\leq U^\mu(\tau) + 2\varepsilon + \int_{K-\Delta(\zeta,r)} \log\frac{|\omega-\tau|}{|z-\omega|}d\mu(\omega).$$

Оставяме сега $z \to \zeta$ (тогава и $\tau \to \zeta$, като при това $\tau \in K$). Резултатът е

$$\limsup_{z\to\zeta} U^\mu(z) \leq \limsup_{\tau\to\zeta,\tau\in K} U^\mu(z).$$

Твърдението следва от очевидното неравенство

$$\limsup_{z\to\zeta} U^\mu(z) \geq \limsup_{\tau\to\zeta,\tau\in K} U^\mu(z).$$

b): По условие

$$U^\mu(\zeta) = \lim_{\tau\to\zeta,\tau\in K} U^\mu(\tau) = \tag{3}$$
$$= \limsup_{\tau\to\zeta,\,\tau\in K} U^\mu(\tau).$$

По-нататьк, по **a**

$$\limsup_{\tau\to\zeta,\,\tau\in K} U^\mu(\tau) = \tag{4}$$
$$\limsup_{\tau\to\zeta} U^\mu(\tau) \geq \liminf_{\tau\to\zeta} U^\mu(\tau).$$

От суперхармоничността на потенциала имаме

$$U^\mu(\zeta) \leq \liminf_{\tau\to\zeta} U^\mu(\tau).$$

Комбинирајки (3), (4) и последното неравенство, стигаме до търсения резултат. **Q.E.D.**

Теорема 7.6, принцип за максимума ([4]): *$\mu-$ крајна борелева мярка с компактен носител* $\mathrm{supp}(\mu) = K$.

Ако

$$U^\mu(z) \leq M, \text{ за всяко } z \in K,$$

то

$$U^{\mu}(z) \leq M, \text{ за всяко } z \in \mathbf{C}.$$

Доказателство Както знаем, логаритмичният потенциал е субхармонична функция в $\mathbf{C}\setminus K$, като $U^{\mu}(z) \to -\infty$, $z \to \infty$. По предишната теорема и по даденост,

$$\limsup_{z\to\zeta, \zeta\in K, z\in\mathbf{C}-K} U^{\mu}(z) = \limsup_{z\to\zeta,\, z\in K} U^{\mu}(z) \leq M.$$

Прилагајки принципа за максимума на субхармоничните функции върху всяка компонента на $\mathbf{C}-K$, стигаме до твЪрдението. **Q.E.D.**

References

[1] N.S.Landkov, Foundations of modern potential theory, "Nauka", Moscow, 1966, first edition.

[2] E. Saff, V. Totik, Logarithmic potentials with external fields, Springer Verlag, Berlin, 1997.

[3] M. Tzuji, Potential Theory in Modern Functional Analysis, Maruzen, Tokyo, 1959.

[4] T. Runsford, Potential theory.