4. Суб-суперхармонични функции

Definition 1. *Нека* X е топологично пространство, нека $z_0 \in X$ и f *е функция, дефинирана в околност* U на точката z_0, като $f(z) : U \longrightarrow [-\infty, \infty)$. *Казваме, че* f **е полунепрекъсната отгоре (u.s.c.)** в z_0, *ако*

$$\limsup_{z \to z_0} f(z) \leq f(z_0).$$

Респективно, **полунепръсната отдолу (l.s.c.)** в z_0, *ако* $f(z) : U \longrightarrow (-\infty, \infty]$ *и*

$$\liminf_{z \to z_0} f(z) \geq f(z_0).$$

Очевидно ако f е полунепръсната отдолу $-f$ е полунепръсната отгоре и обратно.

Оставяме на читателя да провери, че една функция е непрекъсната в дадена точка тогава и само тогава, когато е едновременно полунепрекъсната отдолу и отгоре в тази точка.

Definition 2. *Функцията* f *е* **u.s.c.** z_0, *ако за всяко* $\alpha > f(z_0)$*съществува отворена околност* V *на точката* z_0 *такава, че*

$$f(z) < \alpha$$

всеки път, когато $z \in V$. *Аналогично, ако за всяко* $\alpha < f(z_0)$*съществува отворена околност* W *на точката* z_0 *такава, че*

$$f(z) > \alpha$$

всеки път, когато $z \in W$, *то функцията е полунепрекъсната отдолу в* z_0 **(l.s.c.)**

Предоставяме на читателя да докаже еквивалентността на двете дефиниции

Definition 3. f *е U.S.C (l.s.c.) в* $Y \subset X$, *ако е u.s.c. (l.s.c.) във всяка точка от* Y.

По същество втората дефиниция е**:** *Функцията* f *е u.s.c. в* z_0, *ако за всяко* $\alpha \in R$ *множеството* $\{z, f(z) < \alpha\}$ *е отворено в топологията на* X.)

Ще установим верността на

Теорема 4.1 *K -компактно множество и $f-$* **u.s.c.** *в K. Тогава $f(z)$ е ограничена отгоре и достига своята най- голяма стойност.*

Доказателство: Полагаме $M_n := \{z \in K, f(z) < n\}$, $n \in \mathbf{N}$. Поради полунепрекъснатостта отгоре всяко $M_n, n = 1, 2, \cdots$ е отворено. Вярно е още и представянето

$$K = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n.$$

Но, поради компактността на K, от покритието $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ може да се извлече крайно подпокритие, т.е. съществуват краен брой естествени числа $n_1 < n_2 < \cdots < n_j$ такива, че

$$K = \bigcup_{i=1}^{j} M_{n_i}.$$

Връшайки се кън дефиницията, виждаме, че f е ограничена върху K. С това първата част на теоремата е доказана.

Нека $S := \sup_{z \in K} f(z)$. Допускаме, че $f(z) < S, z \in K$ и дефинираме множествата $S_n := \{z \in K, f(z) < S - \frac{1}{n}\}$, $n \in \mathbf{N}$. Както и преди, съществуват краен брой числа $n'_1 < \cdots < n'_l$ такива, че $K = \bigcup_{i=n'_1}^{n'_l} S_{n'_i}$. Но тогава влизаме в противоречие с дефиницията на числото S. Полученото противоречие доказва теоремата. **Q.E.D.**

Ще видим понататък, че полунепрекъснатите функции са граници на монотонно намаляващи редици от непрекъснати функции.

Теорема 4.2 *Нека f* **е u.s.c.** *в множеството M. Тогава съществува безкрайна редица от монотонно намаляващи непрекъснати функции*

$$\varphi_1(x) \geq \varphi_2(x) \cdots \geq \varphi_n(x) \geq \cdots f(x)$$

такива, че

$$\lim \varphi_n(x) = f(x).$$

Доказателство: Твърдението е очевидно, ако $f \equiv -\infty$. Затова ще се спрем на случая, когато $f \not\equiv -\infty$.

Дефинираме за $n \in \mathbf{N}$ функциите

$$\varphi_n(z) := \sup_{y \in M} (f(y) - n|z - y|).$$

Проверяваме лесно, че

$$|\varphi_n(z') - \varphi_n(z'')| \leq n|z' - z''|.$$

Действително,

$$\phi(z') \geq f(y) - n|z' - y|$$

за всяко $y \in X$ и нека

$$\phi(z") = f(y") - n|z" - y"|.$$

Тогава

$$\varphi_n(z') - \varphi_n(z'') \leq f(y") - f(y") + n(|z' - y"| - |z" - y"|) \leq n|z' - z"|$$

По същия начин получаваме и

$$\varphi_n(z") - \varphi_n(z') \leq n|z' - z"|.$$

което доказва указаното неравенство. Следователно така дефинираните функции $\varphi_n, n = 1, 2, \cdots$ са непрекъснати. Очевидно

$$\varphi_1(z) \geq \varphi_2(z) \geq \cdots \varphi_n(z) \geq \cdots \geq f(z),$$

откъдето следва неравенството

$$\liminf \varphi_n(z) \geq f(z). \tag{1}$$

Ще покажем, че

$$\limsup \varphi_n(z) \leq f(z) \tag{2}$$

за всяко $z \in M$. Действително, нека

$$A > f(z).$$

(да напомним, че функцията $f(z)$ е ограничена.) Фиксираме $\alpha < A$, такова, че

$$f(z) < \alpha.$$

От полунепрекъснатостта следва съществуването на положително число δ такова, че

$$f(y) < \alpha \text{ всеки път, когато } |y - z| < \delta.$$

По- нататък, за $n > \frac{A-\alpha}{\delta}$ имаме

$$\varphi_n(z) = \sup_{y\in M}(f(y) - n|z-y|) \begin{cases} < \alpha, & |z-y| < \delta \\ < f(y) - \frac{A-\alpha}{\delta}|y-z| < \\ < f(y) - A + \alpha, & |z-y| \geq \delta \end{cases}$$

Следователно,

$$\varphi_n(z) < \alpha \quad \text{за } n > \frac{A-\alpha}{\delta}.$$

С това **(2)** е доказано. Обединявайки **(1)** и **(2),** стигаме до твърдението на теоремата. **Q.E.D.**

Definition 3. *Нека* X е топологично пространство и $f : X \longrightarrow [-\infty, \infty)$. *Функцията* f *е* **субхармонична в** X, ако

$$\mathbf{a)} f \ e \ \mathbf{u.s.c.} \quad \mathbf{v} \ X$$

и
b) *за всяко* $z \in X$ *съществува* ρ, $\Delta(z, \rho) \subset X$ *такова, че*

$$f(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\Theta}) d\Theta \tag{3}$$

Функцията f **е суперхармонична в** X, *ако функцията* $-f$ *е субхармонична в* X.

Читателят лесно ще провери верността на

Теорема 4.3 *Нека* D *е област в* $\mathbf{C}$ *и нека* $f \in \mathcal{A}(D)$. *Тогава функциите* $|f(z)|^\alpha$, $\alpha > 0$ и $\log |f(z)|$ *са субхармонични в* D.

Теорема 4.4 *В горните условия за* D, нека f, g *са* **subharmonic.** *Тогава субхармонични са и* **max** $(f, g)(z)$**,** както и $\alpha f + \beta g, \alpha, \beta > 0$.

Ще отбележим още, че хармоничните функции са едновременно супер и суб **-** хармонични.

Ще продължим със следната

Теорема 4.5 -принцип за максимума на субхармоничните функции. *Нека* $u-$ *субхармонична в областта* $D \subset \mathbf{C}$. *Тогава*
a. u *достига своя максимум върху границата* ∂D, *освен ако не е тъждествена константа.*
b. *ако за всяка точка* $\zeta \in \partial D$

$$\limsup_{z \to \zeta, z \in D} u(z) \leq 0,$$

то $u(z) \leq 0$ *в* D.

Доказателство: Ще отбележим в началото, че функцията u може да достига абсолютен, локален максимум или минимум във вътрешни точки, без непременно да е тъждествена константа в D. Като пример, да посочим функцията $u(z) :=$ **max (** $\mathbf{Re} z, 0)$, дефинирана върху цялата комплексна равнина. По нататък, по дефиниция за област в разширената Гаусова равнина, безкрайно отдалечената точка е точка от границата и.' Валидността на теоремата зависи именно от тази конвенция.

Да допуснем, че u достига абсолютния си максимум M във вътрешна точка на D и да дефинираме множествата

$$A := \{z \in D, u(z) < M\},\, B := \{z \in D, u(z) = M\}.$$

Множеството A е отворено поради полунепрекъснатостта. Очевидно и B е отворено, поради свойството на средните стойности (ср. с **(3)**). Но $D = A \bigcup B$, и тъй като D е свързано множество, то или $D \equiv A$, или $D \equiv B$. С това **a)** е доказано.

Да продължим функцията u до границата ∂D, дефинирайки

$$u(\zeta) := \limsup_{z \to \zeta, z \in D} u(z).$$

u е **u.s.c.** ∂D, така че по **Th. 4.1** u достига абсолютния си максимум върху $\overline{D}$, да кажем, в точката w. Ако $w \in \partial D$, то $u(z) \leq 0$ в D. Ако точката w е вътрешна в D, то според първата част на теоремата, $u(z) \equiv Const$ в D, а оттам и върху $\overline{D}$. Отново $u(z) \leq 0$ в D. **Q.E.D.**

Ще покажем, че е възможно да заменим ∂D с $\partial D - \{\infty\}$, стига в частта **b)** функцията u да не расте "прекалено бързо". Валидна е, по-конкретно, следната

Теорема 4.6 -принцип на Phragmen - Lindelöf. $u-$ **subharmonic** *в неограничената област* D, *като*

$$\limsup_{z \to \zeta} u(z) \leq 0,\, \zeta \in \partial D - \{\infty\}.$$

Ако съществува крайна суперхармонична функция v *такава, че*

$$\liminf_{z \to \infty} v(z) > 0, \text{ и } \limsup_{z \to \infty} \frac{u(z)}{v(z)} \leq 0,$$

то

$$u(z) \leq 0 \text{за всяко } z \in U.$$

Доказателство: Ще започнем със случая, когато $v(z) > 0$ *в* D. Фиксираме $\varepsilon > 0$ и въвеждаме функцията $u_\varepsilon(z) := u(z) - \varepsilon v(z)$. Тя е субхармонична в D (ср. **Th.4.4**)и, поради $\limsup_{z \to \zeta} u(z) \leq 0$ за всяка точка ζ от границата на D, то, според **Th.4.5,b** $u(z) \leq 0$, $z \in D$. Оставяйки $\varepsilon \to 0$, стигаме до твърдението.

Ще разгледаме общия случай. Нека $\eta > 0$; полагаме $F_\eta := \{z \in D, u(z) \geq \eta.\}$ Тъй като v е полунепрекъсната отдолу и $\liminf_{z\to\infty} v(z) > 0$, то v ще бъде ограничена отдолу върху F_η. Без да нарушаваме общността, можем да считаме, че $v > 0$. Нека

$$V := \{z \in D, v(z) > 0.\}$$

Тогава За $\zeta \in \partial V - \{\infty\}$ са в сила оценките

$$\limsup_{z\to\zeta}(u(z) - \eta) \leq \begin{cases} \limsup_{z\to\zeta} u(z), & \zeta \in \partial D - \{\infty\} \leq 0 \\ u(\zeta) - \eta, & \zeta \in \partial V \bigcap D \leq 0 \end{cases}$$

Но, според предишното доказателство, отнесено към функцията $u - \eta$, ще имаме $u - \eta \leq 0$ върху V. Тъй като $F_\eta \subset V$ и $u(z) \leq \eta$ върху $D - F_\eta$, то $u < \eta$ върху D. Твърдението следва след граничен преход по η.

Следствие 4.6*Нека* u е **subharmonic** *в неограничената област* D, *като*

$$\limsup_{z\to\zeta} u(z) \leq 0, \zeta \in \partial D - \{\infty\} \text{ и } \limsup_{z\to\infty} \frac{u(z)}{\log|z|} \leq 0.$$

Тогава

$$u(z) \leq 0,\ z \in D.$$

Доказателство: Фиксираме $w \in \partial D$ и прилагаме **Th.4.6** с $v(z) = \log|z - w|$.

Следствие 4.7-Теорема наLiouville *Нека* u *е* **subharmonic** в **C** *и*

$$\limsup_{z\to\infty} \frac{u(z)}{\log|z|} \leq 0.$$

Тогава $u \equiv Const$ **v C**. *В частност, всяка функция, субхармонична в цялата равнина, която е ограничена отгоре, е константа.*

Exercise **1.** Нека F е точково множество в комплексната равнина и χ_F е неговата характеристична функция. Докажете, че χ_F е полунепрекъсната отгоре тогава и само тогава, когато F е затворено.

Exercise **2.** Покажете, като използвате неравенството на **Cauchy-Schwartz,** че ако $U \subset \mathbf{C}$ е отворено множество и $h \in \mathcal{H}(U)$, то и $h^2 \in \mathcal{H}(U)$.

Exercise **3.** Докажете валидността на

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|z - re^{i\Theta}|d\Theta = \begin{cases} \log|z|, & \textbf{if } r \leq |z|, \\ \log r, & \textbf{if } r > |z|. \end{cases}$$

Exercise **4.** Нека $u_1, u_2, \cdots, u_n$ са субхармонични в областта $D \subset D$. Да предположим, че сумата $u_1 + \cdots u_n$ достига своя максимум в D. Покажете, че при тези предположения всяка функция u_i е хармонична в D.