5. Критерии за субхармоничност

Подобно на хармоничните функции, субхармоничните са единно свързано с интеграла на Поасон, удовлетворявайки неравенството на Поасон. Ще докажем следната теорема

Теорема 5.1 *Нека* U *е отворено множество в Гаусовата равнина* $\mathbf{C}$ *и* , $u(z) : U \longrightarrow [-\infty, \infty)$ *е полунепрекъсната отгоре функция. Еквивалентни са тогава следните твърдения*
a) *е субхармонична в* U;
b) *всеки път, когато* $\Delta(w, \rho) \subset U, r < \rho, 0 \leq t \leq 2\pi$ *е вярно неравенството*

$$u(w + re^{it}) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\cos(t - \Theta)} u(w + \rho e^{i\Theta}) d\Theta;$$

c) *За всяко компактно подмножество* $K \subset U$ *и всяка функция* $h \in \mathcal{H}(K)$ *такава, че*

$$\limsup_{z \to \zeta} (u - h(z)) \leq 0, \, \zeta \in \partial K$$

е вярно и

$$u(z) \leq h(z), z \in K.$$

Доказателство: *a)* $\longrightarrow$ *c)*:За дадени $K, h \in \mathcal{H}(K)$ функцията $u - h$ е субхармонична върху K. Твърдението следва от принципа за максимума на субхармоничните функции (Th.4.5)

c)$\longrightarrow$ *b)*: Нека $\Delta(w, \rho) \subset U$. По Th.4.2 съществува редица от непрекъснати монотонно намаляващи функции $\cdots \phi_n(z) \geq \phi_{n+1}(z) \geq \cdots$ такива, че $\phi_n \to u$. По-нататък, според Th.2.2, функциите $P_\Delta \phi_n$ са хармонични в $\overline{\Delta}(w, \rho)$. Освен това, $\lim_{z \to \zeta} P_\Delta \phi(z) = \phi(\zeta), \, \zeta \in \partial\Delta$, така че

$$\limsup_{z \to \zeta} (u - P_\Delta \phi)(z) \leq (u - \phi_n)(\zeta), \, \zeta \in \partial\Delta.$$

От c) следва

$$u \leq P_\Delta \phi(z), z \in \Delta.$$

Твърдението се получава след граниен преход по $n \to \infty$ и отчитане на монотонността.

b)$\longrightarrow$ *a)*: Доказателството е ясно. **Q.E.D.**

Следващият критерий за субхармоничност включва Лапласиана на разглежданата функция.

Теорема 5.2 *Нека* U *е отворено множество и нека* $u \in C^2(U)$. *При тези предположения* u *е субхармонична в* U *тогава и само тогава, когато* $\Delta(u)(z) \geq 0$, $z \in U$.

Доказателство: Ще започнем с доказателството, че неравенството $\Delta(u)(z) \geq 0$ означава субхармоничност. За целта ще се възползваме от твърдението c) на предишната теорема Нека K е компактно подмножество и нека $f \in \mathcal{H}(K)$ е такава, че

$$\limsup_{z \to \zeta} (u - f)(z) \leq 0 \text{ за всяко } \zeta \in \partial K.$$

Ще покажем, че $u \leq f$ върху K. Фиксираме $\varepsilon > 0$ и дефинираме

$$v_\varepsilon := \begin{cases} u(z) - f(z) + \varepsilon |z|^2, & z \in K, \\ \varepsilon |z|^2, & z \in \partial K. \end{cases}$$

v_ε е субхармонична, следователно достига максимум върху K. Но максимумът не може да е локален, тъй като $\Delta v_\varepsilon = \Delta u + 4\varepsilon > 0$ навсякъде в K. Следователно мамсимумът се достига в точка от границата, което води до $u - f \leq \sup_{\partial K} \varepsilon |z|^2$. Твърдението, че функцията е субхармонична следва след граничен преход по $\varepsilon \to 0$.

Нека функцията u е субхармонична в областта U. Да допуснем, че за някое $w \in U$ е вярно $\Delta u(w) < 0$. По непрекъснатост тогава неравенството се запазва и в подходяща околност на w, т.е.

$$\Delta u(z) < 0,\ |z - w| < r.$$

Тогава, според предишното доказателство u ще е суперхармонич на, което де факто означава, че в посочената околност е хармонична. В частност,

$$\Delta u(z) = 0,\ |z - w| < r.$$

което противоречи на предишното неравенство. Следователно навсякъде в U

$$\Delta u(z) \geq 0.$$

Q.E.D.

Следващата теорема, наречена още " теорема за залепването" илюстрира флексибелността на субхармоничните функции.

Теорема 5.3 *Нека* u *е субхармонична функция в отвореното множество* $U \subset \mathbf{C}$ *и нека функцията* v, *субхармонична в отвореното подмножество* $V \subset U$ *е такава, че*

$$\limsup_{z \to \zeta} v(z) \leq u(\zeta),\ \zeta \in U \bigcap \partial V.$$

Дефинираме

$$w(z) := \begin{cases} \max(u,v)(z), & z \in V \\ u(z), & z \in U - V \end{cases}$$

Тогава така дефинираната функция w *е също субхармонична в* U.

Ще завършим този раздел с теорема за безкрайни редици от субхармонични функции. Тя се отнася до редица от монотонно намаляващи субхармонични функции. Обръщаме внимание върху това, че теоремата не е вярна за непрекъснати функции.

Теорема 5.4 *Нека* U е отворено множество и $\{u_n\}$*е редица от монотонно намаляващи субхармонични функции* ; $u_1(z) \geq u_2(z) \geq \cdots u_n(z) \geq \cdots$. *Тогава* $u := \lim u_n$ *също е субхармонична в* U.

Доказателство: За всяко число $\alpha > 0$ множеството $\{z \in U, u(z) > \alpha\}$ е обединение на отворени множества $\{z \in U, u_n(z) > \alpha\}$ и, следователно, също е отворено. По дефиниция, тогава, u е l.s.c.

По- нататък, ако $\Delta(w, \rho) \subset U$, то за всяко $n \geq 1$

$$u_n(w) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(w + \rho e^{i\Theta}) d\Theta.$$

Оставяйки и използвайки теоремата за монотонно шодящи редици виждаме, че u удовлетворява неравенството за субхармонични функции. **Q.E.D.**

Exercise 1: Нека множествата U_1, U_2 са отворени и $f \in \mathcal{A}(U_1)$, $f : U_1 \longrightarrow U_2$.

a) Докажете, че ако $h \in \mathcal{H}(U_2)$, то $h \circ f \in \mathcal{H}(U_1)$.

b) Ако f е конформна в U_1, а u е субхармонична в U_2, то и $u \circ f$ е субхармонична.