II. Потенциал - дефиниция, основни свойства.

8. Равновесна мярка, константа на Робен, логаритмичен капацитет

Definition: Нека μ е крайна Борелева мярка в $\mathbf{B}(\mathbb{C})$. Изразът

$$I[\mu] := \int\int_{\mathrm{supp}(\mu)} \log\frac{1}{|z-t|}d\mu(t)d\mu(z) = \int U^{\mu}(z)d\mu(z)$$

се нарича *енергия, породена от мярката* μ.
Теорема 8.1 *Нека*

$$\mu_n \longrightarrow \mu,\ n\to\infty.$$

Тогава

$$I[\mu] \le \liminf I[\mu_n].$$

(*т.е.,* $I[\mu]$ *е полунепрекъсната отдолу функция.*)
Доказателство : *Доказателството следва техниката на* Th.7.3 i Th.7.4. *и се оставя на читателя.*

Следващата теорема има фундаментален характер. Доказателството[1] няма да привеждаме.
Теорема 8.2 *Нека* μ_1, μ_2 *са единични Борелеви мерки*[2] *с носители върху компакта* K *и такива, к* $I[\mu_1] = I[\mu_2]$*.Тогава* $I[\mu_1-\mu_2] \ge 0$ *и* $I[\mu_1-\mu_2] = 0$ *тогава и само тогава, когато* $\mu_1 = \mu_2$.

Да означим с $\mathbf{U}(K)$ множеството от единичните Борелеви мерки, съсредоточени върху компактното множество K.

Definition: *Нека* K *е компактно множество в* $\mathbf{C}$*.Ако съществува мярка* μ_K*, такава, че*

$$I[\mu_k] = \inf_{\mu\in\mathbf{U}(K)} I[\mu], \tag{1}$$

[1] [2]
[2] Мярката μ е единична върху K, ако $\|\mu\|_K = \mu(K) = 1$.

то тя се нарича равновесна мярка на K, *а съответният логаритмичен потенциал - равновесен потенциал. Числото* $\inf_{\mu\in\mathbf{U}(K)} I[\mu]$ *е т.н."Константа на Робен"* за компакта K и се означава с $\gamma(K)$.

Ще покажем, че равновесната мярка винаги съществува и е еднозначно определена, стига множеството K да не е полярно. [3]

Теорема 8.3: *Нека* K *е неполярен компакт в* $\mathbf{C}$. *Тогава съществува равновесна мярка.*

Доказателство От неполярността на K и от Th. 7.1 следва , че

$$\gamma(K) = \inf_{\mu\in\mathbf{U}(K)} I[\mu] > -\infty.$$

Нека $\gamma(K) < \infty$. Ще покажем, че равновесната мярка е единствена. Избираме редица от мерки μ_n, такива, че

$$I[\mu_n] \to \gamma(K).$$

По теоремата на Helly съществува подредица, която ще означаваме също с $\{\mu_n\}$ и която клони в слабата топология към някаква мярка ν, т.е.

$$\mu_n \longrightarrow \nu, \mu_n, \nu \in \mathcal{U}(K).$$

От Th.8.1. следва

$$\liminf I[\mu_n] \geq I[\nu],$$

като при това по конструкция

$$\liminf I[\mu_n] = \gamma(K).$$

Отчитајки факта, че $\gamma(K)$ минимизира енергиите по единичните мерки върху компакта, стигаме до твърдението за съществуване на равновесна мярка, т.е.

$$\nu = \mu(K).$$

Единствеността следва от Th. 8.2.

Ако $\gamma(K) = \infty$, то $I[\mu] = \infty$ за всяка Борелева мярка, и въпросът за съществуването е решен. **Q.E.D.**

Теорема 8.4 (**Frostman's theorem**): *Нека* K *е компактно множество в* $\mathbf{C}$ *и нека* μ_K *е неговата равновесна мярка. Тогава* :

[3] Едно множеството F е полярно, ако $\nu(F) = 0$ за всяка Борелева мярка ν.

a)

$$U^{\mu_K}(z) \leq \gamma(K) в \mathbf{C};$$

b)

$$U^{\mu_K}(z) = \gamma(K) \text{ почти навсякьде в } K.$$

4

Теоремата на Фростман е изключително важно поради многобройните си приложения. С право тази теорема е една от фундаменталните в теорията на потенциала.

Definition: *Числото* $e^{-\gamma(K)}$ *се нарича "капацитет на компакта"* K и се означава с $\operatorname{cap}(K)$.

Някои основни својства:

1. $\operatorname{cap}(K) > 0 \longleftrightarrow \gamma(K) < \infty$.
2. $\operatorname{cap}(K) = 0 \Longrightarrow K$ е полярен.
3. $K_1 \subset K_2 \Longrightarrow \operatorname{cap}(K_1) \leq \operatorname{cap}(K_2)$.
4. $\operatorname{cap}(K) = \operatorname{cap}(K + a)$
5. $\operatorname{cap}(rK) = r \operatorname{cap}(K)$, $r > 0$.

Едно от приложенията на теоремата на Фростман е практическото намиране на равновесните мерки и потенциали, върху което ще се спрем.

Теорема 8.5 K - *компакт,* $\operatorname{cap}(K) > 0$ *и нека* $\nu \in \mathcal{U}(K)$. *Ако*

$$U^{\nu}(z) = C \mathit{za\ vsyako}\ z \in K,$$

то

$$C = \gamma(K)$$

и

$$\nu = \mu_K.$$

Оставяме на читателя да докаже, че равновесната мярка на кръга с радуис r е $\frac{d\Theta}{2\pi r}$, а равновесния потенциал

$$U^{\mu}(z) = \begin{cases} \log \frac{1}{r}, & |z| \leq r, \\ \log \frac{1}{|z|}, & |z| > r, \end{cases}$$

[4] навсякьде с изключение на полярно подмножество.

References

[1] T. Runsford, Potential theory.

[2] E. Saff, V. Totik, Logarithmic potentials with external fields, Springer Verlag, Berlin, 1997.

[3] M. Tzuji, Potential Theory in Modern Functional Analysis, Maruzen, Tokyo, 1959.

Exercises

1. E_1, E_2- компакти,

$$\operatorname{cap}(E_1) = 0. \Longrightarrow \operatorname{cap}(E_1 + E_2) = \operatorname{cap}(E_2).$$

2. n - редица от компакти, $E_n \subset E_{n+1}, n = 1, 2, \cdots$. Полагаме $E := \bigcup E_n$. *Да се докаже, че*

$$\operatorname{cap}(E) = \lim \operatorname{cap}(E_n).$$

3. Намерете равновесната мярка и равновесния потенциал на единичния интервал.

4. $K = E \bigcup \Delta, \Delta-$единичен крьг , $E-$ полярен компакт. Нека ν е равновесната мярка на K. Обосновете

$$I[\nu] < \infty.$$

Докажете, че

$$\nu(E) = 0$$

и оттук проверете, че $U^\nu \in \mathcal{H}(\mathbf{C} \setminus \overline{\Delta}))$.

Използвајте принципа за минимума, за да докажете, че

$$U^\nu > I[\nu]$$

върху E.