Тест, Април 2007, Решения

1. **Областта** $\{z, 0 < \ \mathbf{arg} \ < 2\pi/3\}$ **да се изобрази еднозначно и конформно в ивицата** $\{w,\ 0 < \ \mathrm{Im}\, w < 2\pi\}$.

Решение: Изображението $z_1(z) = z^3$ изпраща дадената област в цялата равнина, разрязана по положителната част ос на реалната права. По-нататък $z_2 = \ \mathrm{Log}\ z_1$, като $\mathrm{Log}\ \cdot$ е главният клон на лог-функцията, (или, $\mathrm{Log}\ z = \ln|z| + i\ \mathrm{arg} z$, $\mathrm{arg}\ \in [0, 2\pi]$,) изпраща областта в желаната ивица. Търсеното изображение има вида

$$w(z) = z_2(z_1(z)).$$

2.**Цялата равнина, разрязана по положителната част на имагинерната ос, да се изобрази конформно и еднолистно върху областта** $\{z, -\pi/2 < \ \mathrm{arg} z < \pi/6.\}$

Решение: Големината на безкрайния ъгъл $\{z, -\pi/2 < \ \mathrm{arg} z < \pi/6\}$ е равна на $2\pi/3$, следователно е уместно да се ориентираме към изображението $w(z) = z^{1/3}$. При избор на подходящ клон ще стигнем до посочения ъгъл. Именно: полагаме D :=равнината, разрязана по положителната част на имагинерната ос. Записваме D във вида: $D := \{z, \pi/2 < \ \mathrm{arg}\ z < 5\pi/2\}$; при този избор ще имаме $\mathrm{arg}\ 1 = 2\pi$. След това извършваме трансформацията $w(z) = z^{1/3}$, като избираме онзи еднозначен клон, при който $1^{1/3} = 1$. (или $z^{1/3} = |z|^{1/3} e^{i\frac{arg z - 2\pi}{4}}$.)

3. Вътрешността на кръга $D_0(2)$ да се изобрази еднолистно и конформно върху единичния кръг по такъв начин, че $\frac{1+i}{2} \to 0$.

Решение: Задачата може да се реши по няколко начина. Или чрез двойно отношение, изпращащо три различни точки от $C_0(2)$ в три точки от $C_0(1)$ със запазване на посоката, или като се използва апарата на инверсните точки. Във втория случай трансформацията има вида:

$$w(z) = K\frac{z - \frac{1+i}{\sqrt{2}}}{z\frac{1-i}{\sqrt{2}} - 4}, \text{като } |K| = 2$$

4. **Външността на единичния кръг да изобрази в цялата равнина, разрязана по безкрайния лъч** $\{z, \ \mathbf{arg} \ = \pi/4\}$.

Решение: Трансформацията на Жуковски $z_1 = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ изпраща единичния кръг в цялата равнина, разрязана по отсечката $[-1, 1]$. По-нататък функцията $z_2 = \frac{1-z}{1+z}$ води до цялата равнина, разрязана по положителната реална полуос, след което ротацията $z_3 = z_2 e^{i\pi/4}$ - до равнината от условието. Търсената трансформация е композиция на трите.

, 5. **НЕКА $\mathcal{D}$ е област $\mathbb{C}$ и $f \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$. Възможно ли е и кога**

$\overline{f(z)} \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$.

Решение: Нека $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. $\overline{f(z)} = u(x, y) - iv(x, y)$. **Ako и двете функции са аналитични в областта $\mathcal{D}$, то от уравненията на Cauchy - Riemann**

$$u'_x(x, y) = v'y(x, y), \ u'y(x, y) = -v'_x(x, y)$$

и

$$u'_x(x, y) = -v'y(x, y), \ u'y(x, y) = v'_x(x, y)$$

за всяко $z \in \mathcal{D}$. Това е възможно обаче само когато $f \equiv Const$.

6. НЕКА $\mathcal{D}$ е област $\mathbb{C}$ и $f \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$. Нека, по-нататък, $|f| \equiv Const$ в $\mathcal{D}$. Докажете, че това не е възможно, освен ако f не е тъждествена константа в $\mathcal{D}$.

Решение: Действително, нека $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$. От условието имаме

$$u^2 + v^2 = C^2.$$

Диференцирайки по x и по y, получаваме

$$-\frac{u}{v} = \frac{v'_y}{u'_y} = \frac{v'_x}{u'_x},$$

откъдето следва, след прилагането на уравненията на Cauchy - Riemann, че

$${u'_y}^2 + {v'_y}^2 = {u'_x}^2 + {v'_x}^2 = 0,$$

или

$$u'_x = v'_x = v'_y = u'_y = 0$$

навсякъде в $\mathcal{D}$. Това е възможно само когато $f \equiv Const.$

7. Да се намери аналитична функция $f(z)$, за която Re $f(z) = \cos x(e^y + e^{-y})$ и $f(0) = 1$.

Решение: Търсената функция има в общия вид

$$f(z) = \cos x(e^y + e^{-y}) + i\sin(-e^y + e^{-y}) + iC, \qquad (1)$$

или

$$f(z) = 2\cos z = e^{iz} + e^{-iz} + iC,\ C = Const.$$

Действително, след преработване на израза (1) за f і многократно прилагане на формулите на Euler,

$$f(z) = e^y(\cos x - i\sin x) + e^{-y}(\cos x + i\sin x) + iC = e^{-y}e^{xi} + e^y e^{-ix} + iC$$

$$= e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)} + iC = e^{iz} + e^{-iz} + iC = 2\cos z + iC.$$

В нашия случай задачата няма решение, защото $2\cos 0 = 2 \neq 1 + iC$.