Примерни Теми за Изпит по Комплексен Анализ

1. Изобразете областта $D := \mathbb{C}\setminus\overline{D_0(1)}\bigcup[-2,-1\bigcup[1,2]$ в безкрайния ъгъл G $\{w, \pi < \arg w < 3\pi/2\}$.

Решение: Понеже окончателната област е безкраен ъгъл с широчина $=\pi/2$, то е уместно да участва и изображение от вида $\{\}^{1/4}$ с подходящо избран еднозначен клон. Задачата би могла да бъде решена по следния начин: функцията $z_1 := \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$ ще изпрати областта D в комплексната равнина, разрязана по отсечката $[-5/4, 5/4]$; по-нататък $z_2 := \frac{z_1-5/4}{z_1+5/4}$ - в $\mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$. Последната област може да се запише във вида $\{-\pi \leq \arg z_2 \leq \pi.\}$ След това $z_3 := (z_2)^{1/4}$ с избор на онзи клон, за който $(1)^{1/4} = -1$ изпраща (z_2) в безкрайния ъгъл $\{3\pi/4 \leq \arg z_3 \leq 5\pi/4.\}$ Накрая ротацията на ъгъл $=\pi/4$ ще доведе до G, т.е. $z_4 = z_3 e^{i\pi/4}$. Търсеното изображение е композиция от трите в указаната последователност. £

2. Нека функцията f е аналитична върху и във вътрешността на затворения гладък контур Γ. Докажете, че за всяко $z_0 \notin \Gamma$ е валидно равенството

$$\int_\Gamma \frac{f'(z)}{(z-z_0)}dz = \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz.$$

Решение: Интегралната формула на Коши (приложена спрямо аналитичната функция $f'(z)$) показва, че

$$\int_\Gamma \frac{f'(z)}{(z-z_0)}dz = 2\pi i f'(z_0).$$

От интегралната теорема на Коши знаем по-нататък, че

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz = \int_{C_{z_0}(r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz,$$

като интегрирането се извършва по произволно близка до точката z_0 окръжност $C_{z_0}(r)$, такава, че тя да лежи изцяло във вътрешността на кривата Γ. Развиваме f в ред на Тейлор около точката $z = z_0$;

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n.$$

Тогава ще имаме

$$\frac{f(z)}{(z-z)^2} = \frac{c_0}{(z-z)^2} + \frac{c_1}{z-z_0} + \sum_{n=2}^{\infty} c_n (z-z_0)^{n-2},$$

и респективно,

$$\int_{C_{z_0}(r)} \frac{f(z)}{(z-z)^2} dz = \int_{C_{z_0}(r)} \frac{c_0}{(z-z)^2} dz + \int_{C_{z_0}(r)} \frac{c_1}{z-z_0} dz + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{C_{z_0}(r)} c_n (z-z_0)^{n-2} dz.$$

Дясната страна обаче е равна на $c_1 2\pi i$. Тъй като

$$c_1 = 2\pi i f'(z_0),$$

то твърдението следва оттук и от първото равенство.$\pounds$

3 . Докажете с помощта на теоремата за резидуумите, че

$$I := \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\Theta}{1+\sin^2\Theta} = \pi\sqrt{2}.$$

Решение: По формулите на Euler

$$\sin\Theta = \frac{e^{i\Theta} - e^{-i\Theta}}{2i}.$$

Ако положим

$$z := e^{i\Theta},$$

то новата променлива ще описва веднаж в положителна посока окръжността $C_0(1)$, когато Θ се движи от $-\pi$ до π, а $\bar{z} = \frac{1}{z}$. Пишем

$$I = \frac{1}{i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ie^{i\Theta} d\Theta}{e^{i\Theta}(1+\sin^2\Theta)},$$

след което преминаваме към новата променлива z. Получаваме

$$I = -\oint_{C_0(1)} \frac{z}{z^4 - 6z^2 + 1} dz.$$

Полюсите на подинтегралната функция, които лежат в единичния кръг, са точките

$$z_{1,2} = \pm\sqrt{3-\sqrt{8}}.$$

По теоремата за резидуумите

$$I = 2\pi i \sum_{i=1}^{2} \mathrm{Res}(z_i),$$

което води до искания резултат. $\pounds$

4. Като използвате интегралната формула на Коши, докажете, че ако функцията f е аналитична върху кръга $\overline{D_a(r)}$, то

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\Theta}) d\Theta.$$

Решение: От аналитичността следва представянето

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_a(r)} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Върху окръжността на интегриране е валидно представянето $z - a = re^{i\Theta}, \Theta \in [0, 2\pi]$, откъдето получаваме

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi i} \frac{f(a + re^{i\Theta})}{re^{i\Theta}} ire^{i\Theta} d\Theta.$$

След съкращаването получаваме искания резултат. $\pounds$

5. Конструирайте функция f, която да има двукратна нула в точката $z = 0$, проста нула в $z = 1 + 2i$, съществена особеност в $z = 1$ и прост полюс в $z = -1$.

Решение: Търсената функция има вида

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z-1}} z^2 (z - 1 - 2i)}{(z+1)} g(z),$$

като функцията $g(z)$ е цяла (аналитична навсякъде в комплексната равнина) и различна от нула. $\pounds$

6. Пресметнете

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)}.$$

Решение:Да припомним, че по дефиниция

$$\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\log z}.$$

Тъй като $\log z$ е многозначна функция, то такава е и $\sqrt{z}$. Ако $\log z$ е фиксиран ЕДНОЗНАЧЕН клон на логаритмичната функция, т.е.

$$\log z = \ln|z| + i \text{ Arg } (z) + 2k\pi i, z \neq 0,$$

като $k - fixed$ and $\text{Arg } (z)$ принадлежи на ъгъл с амплитуда $\leq 2\pi$, то и то и $\sqrt{z}$ е еднозначен клон. В нашия случай е подходящ избора на следния еднозначен клон

$$Logz := \ln|z| + i \text{ Arg } (z),$$

като z ще се променя в цялата равнина, разрязана по положителната реална ос, т.е. $0 \leq \text{ Arg } (z) < 2\pi$. Или,

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}e^{i \text{ Arg } (z)/2}, \, 0 \leq \text{ Arg } (z) < 2\pi, \, z \neq 0. \qquad (8)$$

Въвеждаме функцията

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}(z+4)}$$

и разглеждаме

$$I_{r,R} := \int_{\Gamma_{r,R}} f(z)dz, \; r < 4 < R$$

върху сложния контур $\Gamma_{r,R}$, състоящ се от окръжностите $C_0(R)$, обиколена в положителна посока, от окръжността $C_0(r)$, обиколена в отрицателна посока и от двата бряга на отсечката $[r, R]$, съответно в посока $r \longrightarrow R$ и в посока $R \longrightarrow r$. С други думи,

$$I_{r,R} = \oint_{C_0(R)} f(z)dz + \int_R^r f(z)dz - \oint_{C_0(r)} f(z)dz + \int_r^R f(z)dz \qquad (9).$$

От теоремата за резидуумите, приложена за функцията f и областта, ограничена от контура $\Gamma_{r,R}$, следва равенството

$$I_{r,R} = 2\pi i \text{Res}(-4) = \pi. \qquad (10),$$

тъй като $\sqrt{-4} = 2e^{i\pi/2} = 2i$. Да разгледаме интегралите по двете окръжности. Имаме

$$|\oint_{C_0(R)} f(z)dz| \leq \|f(z)\|_{C_0(R)} 2\pi R \leq 2\pi \frac{R}{\sqrt{R}(R-4)} \to 0,\ R \to \infty. \qquad (11)$$

По същия начин и

$$|\oint_{C_0(r)} f(z)dz| \leq \|f(z)\|_{C_0(r)} 2\pi r \leq 2\pi \frac{r}{\sqrt{r}(4-r)} \to 0,\ r \to 0. \qquad (12)$$

По-нататък, съгласно (8),

$$f(z) = \begin{cases} \sqrt{x}, & z = x + iy \in [r, R] \\ \sqrt{x}e^{2\pi i/2} = -\sqrt{x}, & z = x + iy \in [R, r]. \end{cases}$$

Това означава, че

$$\int_R^r f(z)dz + \int_r^R f(z)dz = \int_R^r \frac{1}{-\sqrt{x}(x+4)}dx + \int_r^R \frac{1}{\sqrt{x}(x+4)}dx =$$

$$= 2\int_r^R \frac{1}{\sqrt{x}(x+4)}dx.$$

Замествайки получения резултат в (9) и използвайки (10), виждаме, че

$$2\int_r^R \frac{1}{\sqrt{x}(x+4)}dx + \oint_{C_0(R)} f(z)dz - \oint_{C_0(r)} f(z)dz = \pi.$$

Оставяйки сега $r \to 0$ и $R \to \infty$ получаваме, на основание на (11) и (12) , че

$$I = \pi/2.$$

1. намерете числата z, за които $\cos z = i \sin z$.
Решение: От формулите на Euler получаваме

$$e^{iz} + e^{-iz} = e^{iz} - e^{-iz},$$

което означава, че

$$e^{iz} = 0.$$

Уравнението няма решение.

2. Докажете, че редицата $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща тогава и само тогава, когато безкрайният ред $\sum_{n=0}^{\infty}(z_n - z_{n-1})$ е сходящ.
Решение: Да припомним дефиницията за сходящ безкраен ред: $A := \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ е сходящ, ако редицата от парциалните суми е сходяща, и

$$A := \lim_{N\to\infty} S_N,\ S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n.$$

Решението става очевидно, ако вземем под внимание, че $N-$тата парциалната сума на реда $\sum_{n=0}^{\infty}(z_n - z_{n-1})$ е $a_N - a_0$.

3. Докажете, че ако и двете функции $f(z),\ |f(z)|$ са едновременно аналитични в областта D, то $f \equiv Const$; ако и двете функции $f(z),\ \bar{f}(z)$ са едновременно аналитични в областта D, то $f \equiv Const$.
Решение: Функцията $|f(z)|$ е реалнозначна т.е. имагинерната и' част е тъждествена нула. Но по условие тя е и аналитична едновременно с това. Тогава, според уравненията на Коши-Риман,нейната реална компонента също трябва да е тъждествна константа, т.е. $|f(z)| = Const$ навсякъде в D. Сега ще приложим принципа на максимума на модула на аналитични функции. Тъй като и $f(z)$ Е АНАЛИТИЧНА В D, то $|f(z)|$ ще достига своя максимум върху границата, освен ако не е тъждествена константа. Но в нашия случай $|f(z)| = Const$ навсякъде в D, така че и самата функция ще е тъждествена константа.

Второто твърдение следва от уравненията на Коши-Риман. Действително, нека

$$f = u + iv.$$

Тогава

$$\bar{f} = u - iv.$$

От аналитичността на двете функции имаме

$$u'x = v'y,\ u'y = -v'x,$$

както и

$$u'x = -v'y,\ u'y = v'x.$$

Простото сравнение показва, че

$$u'x = v'y = u'y = v'x =,$$

откъдето следва и нашето твърдение.

4. Нека f е аналитична върху затворения кръг $\overline{K}$ и нека $|f(z) - 1| < 1$ за всяко $z \in \overline{K}$. Докажете, че f няма нули във вътрешността на кръга.
Решение: Ако твърдението не е вярно, то за някоя вътрешна точка z_0 фуннкцията ще се анулира, т.е. $f(z_0) = 0$. Но тогава

$$|0 - 1| < 1,$$

което очевидно е грешно.

5. Определете стойността на интеграла

$$\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz,$$

без директно да го пресмятате, като

$$f(z) = e^z \frac{z^2(z-1)^3}{(z+2)(z-2)^2},$$

а контурът Γ е елипсата с фокуси ± 1, и с голяма и малка полуос съответно $5/4, 3/4$.

Решение: Приложете принципа на аргумента.

6. Пресметнете

$$I := \int_\Gamma \frac{\cos z}{z^2(z-3)} dz$$

като Γ е контурът, ограничаващ областта, заключена между окръжностите $C_{-1}(2)$ и $C_{3/4}(1/4)$:

Решение: Отговорът е

$$I = 2\pi i (\frac{\cos z}{z-3})'(0).$$

7. TEST-APRIL

8. TEST-MAY

Решение